

НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

Монтана, 12-14 май 2023 г.

Група В

Задача 1. Нека \mathbf{A} е квадратна матрица от ред три, шест от елементите на която са равни на единица, а останалите са нули.

- а) Да се посочи максималната възможна стойност на детерминантата на матрицата \mathbf{A} , като отговорът се обоснове;
- б) Да се даде пример на матрица \mathbf{A} , за която тази максимална стойност се достига.

Задача 2. Дадена е окръжност с уравнение $x^2 + y^2 = 1$. През точката $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ са построени допирателните към окръжността. Да се намерят уравненията на тези допирателни и да се намери ъгълът между тях.

Задача 3.

- а) Да се докаже, че за всяко $x \geq 0$ е изпълнено неравенството

$$\sin x \leq x;$$

- б) Да се докаже, че за всяко $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ е изпълнено неравенството

$$\sin x \geq \frac{2}{\pi} x.$$

Задача 4. Дадена е функцията $f(x) = \ln(8x^2 + 6) - x^2$.

- а) Да се намерят локалните екстремуми на $f(x)$;
- б) Да се скицира графиката на $y = f(x)$;
- в) В зависимост от стойностите на реалния параметър a да се намери броят на корените на уравнението $f(x) + a = 0$.

Всяка задача се оценява с максимум 10 точки

Време за работа: 5 часа