

# НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

Монтана, 12-14 май 2023 г.

## Група А

**Задача 1.** Да се пресметне интегралът

$$\int_0^1 (2x^5 - 5x^4 + 4x^3 - x^2)^{2023} dx.$$

**Задача 2.** Нека  $f(x) = x^{2024} + x^{2022} - \alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) и  $\mathbf{A}$  е квадратна матрица от ред 2023 с реални елементи, удовлетворяваща условията:  $f(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$  и  $\text{rank}(\mathbf{A} - t\mathbf{E}) = 2022$  за всеки реален корен  $t$  на  $f(x)$  (с  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{0}$  са означени единичната и нулевата матрици от ред 2023).

- Да се докаже, че  $\alpha = 0$ ;
- Да се намери пример на матрица  $\mathbf{A}$ , изпълняваща условието на задачата при  $\alpha = 0$ .

**Задача 3.** Елементите  $a_{ij}$  на квадратната матрица  $\mathbf{A}$  от ред 2023 са от множеството  $\{-1, 1\}$ , и матрицата  $\mathbf{B} = 2023\mathbf{E} - \mathbf{A}$  е необратима (с  $\mathbf{E}$  е означена единичната матрица от ред 2023).

- Да се докаже, че  $a_{kk} = 1$  за  $1 \leq k \leq 2023$ ;
- Да се докаже, че матрицата  $\mathbf{A}$  е симетрична.

**Задача 4.** Редицата  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  е зададена с  $a_0 = 1$  и  $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ . Да се намери

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - \sqrt{2n}).$$

Всяка задача се оценява с максимум 10 точки

Време за работа: 5 часа