# НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

**гр. Варна, 14-16 май 2021 г.**

**Група В**

**Задача 1.** (10 точки) Даден е квадрат $MNPQ$. Точките $A(2,1)$ и $B(3,5)$ лежат съответно на правите $MN$ и $PQ$, а точките $C(0,1)$ и $D(-3,-1)$ лежат съответно на правите $MQ$ и $NP$. Да се намерят уравненията на правите $MN$, $PQ$, $MQ$ и $NP$ и лицето на квадрата $MNPQ$.

**Решение:** По условие $A \in MN$, $B \in PQ$, $C \in NP$, $D \in MQ$. Тогава $MN: y-1 = k(x-2)$, т.е. $MN: kx - y + 1 - 2k = 0$. Правата $NP$ минава през точка $C$ и е перпендикулярна на правата $MN$, откъдето следва че ъгловият ѝ коефициент е $-\frac{1}{k}$. Така за уравнението на правата $NP$ се получава $NP: y-1 = -\frac{1}{k}x$, т.е. $x + ky - k = 0$.

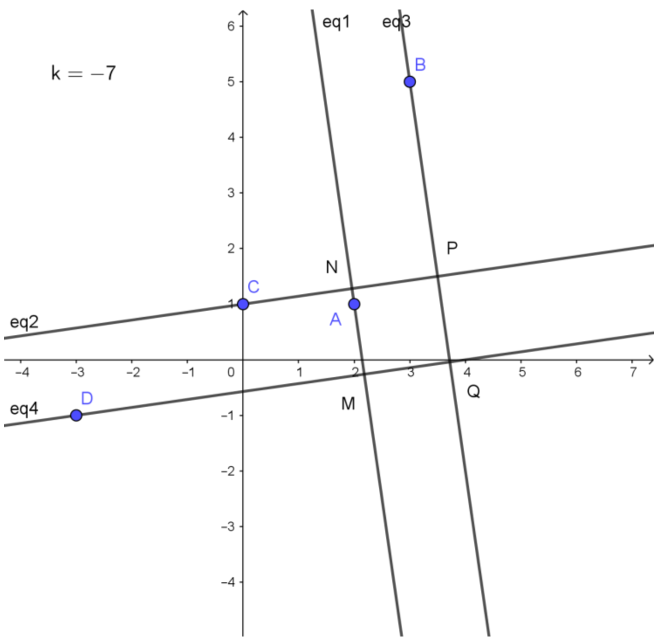
За да определим $k$ ще използваме свойството на квадрата, че разстоянията $d(B, MN) = d(D, NP)$.

Но $d(B, MN) = \dfrac{|3k-5+1-2k|}{\sqrt{k^2+1}} = \dfrac{|k-4|}{\sqrt{k^2+1}}$, а $d(D, NP) = \dfrac{|-3-k-k|}{\sqrt{1+k^2}} = \dfrac{|3+2k|}{\sqrt{1+k^2}}$.

Следователно $\dfrac{|k-4|}{\sqrt{k^2+1}} = \dfrac{|3+2k|}{\sqrt{1+k^2}}$, $|k-4| = |3+2k|$, откъдето $k-4 = \pm(3+2k)$, $k=-7$ или $k = \dfrac{1}{3}$.

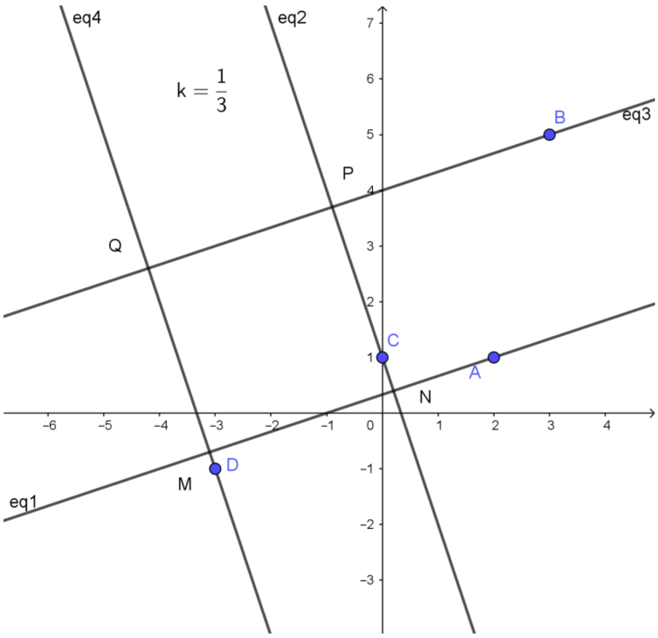
При $k=-7$: $MN: 7x+y-15=0$, $NP: x-7y+7=0$, $PQ: 7x+y-26=0$, $QM: x-7y-4=0$.

Тогава: $MN \cap NP = N\left(\dfrac{49}{25}, \dfrac{32}{25}\right)$, $PQ \cap NP = P\left(\dfrac{7}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$ и $S = NP^2 = \left(\dfrac{11\sqrt{2}}{10}\right)^2 = \dfrac{121}{50}$.



При $k=\frac{1}{3}$: $MN: x-3y+1=0$, $NP: 3x+y-1=0$, $PQ: x-3y+12=0$, $QM: 3x+y+10=0$.

Тогава: $MN \cap NP = N\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)$, $PQ \cap NP = P\left(-\frac{9}{10},\frac{37}{10}\right)$ и $S = NP^2 = \left(\frac{11\sqrt{10}}{10}\right)^2 = \frac{121}{10}$ .




**Задача 2.** (10 точки) Дадени са функциите

$$f(x)=ax^3-2bx^2+(4+c)x+d-2 \text{ и } g(x)=x^3-2x^2+ax-2a-3b+1,$$

където $a$, $b$, $c$ и $d$ са реални параметри. Да се намерят стойностите на параметрите $a$, $b$, $c$ и $d$, за които всяка от функциите има в точката $x=1$ локален минимум, равен на 5.

**Решение:** От условието следва, че:

$$\left|\begin{array}{l} f(1)=a-2b+c+d+2=5 \\ g(1)=-a-3b=5 \\ f'(1)=3a-4b+c+4=0 \\ g'(1)=-1+a=0 \end{array}\right. .$$

Решението на системата е $a=1; b=-2; c=-15; d=13$.

Наистина всяка от функциите $f(x)=x^3+4x^2-11x+11$ и $g(x)=x^3-2x^2+x+5$ има локален минимум при $x=1$, тъй като $f'(1)=0$ и $f''(1)=12.1+8=20>0$, $g'(1)=0$ и $g''(1)=12.1-4=8>0$.

**Задача 3.** (10 точки) Дадени са функцията $f(x)=x^{2021}-x^{2020}+1$ и матрицата

$A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 4 & 5 & -4 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Да се пресметне $f(A)$.

**Решение:** Непосредствено се пресмята $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 4 & 5 & -4 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} = A$, следователно $A^n = A$, $n \in \mathbb{N}$. Тогава $f(A) = A^{2021} - A^{2020} + E$ или $f(A) = A - A + E = E$ ($E$ - единичната матрица от трети ред).

**Задача 4.** Дадена е функцията $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

а) (3 точки) Да се намерят интервалите на монотонност на $f(x)$.

б) (3 точки) Да се докаже, че $f(x) \le \dfrac{1}{e}$ за всяко $x > 0$.

в) (4 точки) Да се определи кое от числата $2020^{2021}$ и $2021^{2020}$ е по-голямо.

**Решение:** а) Функцията е дефинирана за $x \in (0, +\infty)$ и производната ѝ $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$ се анулира при $x = e$. В интервала $(0, e)$ $f'(x) > 0$ и $f(x)$ е растяща, в интервала $(e, +\infty)$ $f'(x) < 0$ и $f(x)$ е намаляваща.

б) От а) следва, че $\underset{x>0}{MAX}\ f(x) = f(e) = \dfrac{1}{e}$. Тогава $f(x) \le \underset{x>0}{MAX}\ f(x) = \dfrac{1}{e}$ за всяко.

в) Функцията $f(x)$ намалява в интервала $(e, +\infty)$.

Следователно $f(2020) = \dfrac{\ln 2020}{2020} > \dfrac{\ln 2021}{2021} = f(2021)$, $2021.\ln 2020 > 2020.\ln 2021$, $\ln 2020^{2021} > \ln 2021^{2020} \Rightarrow 2020^{2021} > 2021^{2020}$.