НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

Боровец, 15-17 май 2026 г.

Група А

Всяка задача се оценява с максимум 10 точки

Задача 1. Дефинираме редицата a_n по следния начин:

$$a_1 = \sqrt{2026}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2026 + \sqrt{a_n}}$$

а) Докажете, че $45 < a_n < 46$ за всяко естествено число n;
б) Докажете, че редицата е монотонна.

Решение. Лесно се проверява чрез метода на математическата индукция, че $45 < a_n < 46$ и, използвайки $a_{n+1}^2 - a_n^2 = \sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}} > 0$, че редицата е строго монотонно растяща. Следователно редицата е строго растяща и ограничена, т. е. има граница.

Забележка. Границата x на редицата удовлетворява уравнението $x = \sqrt{2026 + \sqrt{x}}$. Точното му решение е $x = 45.0856....$

Лесно се вижда например че $45^2 - x^2 = 2025 - 2026 - \sqrt{x} = -1 - \sqrt{x} < 0$, $46^2 - x^2 = 2116 - 2026 - \sqrt{x} = 90 - \sqrt{x} > 0$

Ако сведем уравнението $x = \sqrt{2026 + \sqrt{x}}$ до алгебрично уравнение от четвърта степен, то ще има 2 комплексни и 2 реални корена $x_1 = 44.9366.....$ и $x_2 = 45.0856.....$ Ясно е че трябват допълнителни разсъждения за да се определи че по-големият корен е търсената граница.

Задача 2. Съществува ли линеен оператор $\varphi : \mathbb{F}^{2027} \to \mathbb{F}^{2027}$, за който операторът $\varphi^2 + \varphi + \mathrm{id}$ да е нилпотентен, ако:
а) $\mathbb{F} = \mathbb{R}$;
б) $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Решение. Нека $q(X) = X^2 + X + 1$. Ако $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, то φ има реална собствена стойност λ, понеже $\dim \mathbb{R}^{2027}$ е нечетна. Тогава $q(\lambda) > 0$ е собствена стойност на $q(\varphi)$, което е невъзможно за нилпотентен оператор. Ако $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, вземаме $\omega = e^{2\pi i/3}$ и $\varphi = \omega\,\mathrm{id}$. Тогава $q(\varphi) = 0$.

Задача 3. Нека $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ е множеството на квадратните матрици от ред n с комплексни елементи. Да се намерят всички матрици $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, за които при всеки избор на матрици $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ е изпълнено равенството $\det(X + AB) = \det(X + BA)$.

Решение. Отговорът е

$$\boxed{X = tI, \quad t \in \mathbb{C}.}$$

За $X = tI$ достатъчността следва от блоковия трик

$$Y = \begin{pmatrix} tI & A \\ -B & I \end{pmatrix}, \qquad Z = \begin{pmatrix} I & 0 \\ B & tI \end{pmatrix},$$

защото $\det(YZ) = \det(ZY)$. Обратно, свойството е инвариантно при подобие. Ако Жордановата форма на X не е скаларна, елементарни матрици E_{ij}, E_{ji} различават две диагонални позиции, а нетривиален блок $J_k(\lambda)$, $k \geq 2$, се отделя чрез $A = E_{11}, B = E_{k1}$. И в двата случая получаваме различни детерминанти. Следователно X е скаларна.

Задача 4. Докажете неравенствата:

а) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+2x^2+9}} < \frac{\pi}{2}$;

б) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+2x^2+9}} < \frac{\pi}{3}$.

Решение. а) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+2x^2+9}} < \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+2x+1}} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}$.

б) Полагаме $x = \sqrt{3}y$. Тогава

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+2x^2+9}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^4+2\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^4+2\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2+1}},$$

тъй като $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^4+2\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2+1}} = \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^4+2\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2+1}}$.

Последното лесно се вижда като в $\displaystyle\int_1^\infty$ се направи субституцията $y = \dfrac{1}{z}$. Оттук следва, че

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+2x^2+9}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^4+2\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2+1}} < \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^4+2\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2+1}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = 2\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{3}}\Big|_0^1 = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}.$$

НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

Боровец, 15-17 май 2026 г.

Група Б

Всяка задача се оценява с максимум 10 точки

Задача 1. Квадратните матрици от n-ти ред A и B удовлетворяват условието

$$A + B = AB.$$

а) Да се пресметне $(\mathrm{E} - A)(\mathrm{E} - B)$, където E е единичната матрица от n-ти ред.
б) Да се намери обратната матрица на матрицата $\mathrm{E} - A$.
в) Да се докаже, че $AB = BA$.

Решение. а) По условие

$$AB - A - B = 0.$$

Към двете страни на това равенство добавяме единичната матрица E. Така получаваме

$$\mathrm{E} - A - B + AB = \mathrm{E}.$$

Следователно

$$(\mathrm{E} - A)(\mathrm{E} - B) = \mathrm{E}.$$

б) От равенството

$$(\mathrm{E} - A)(\mathrm{E} - B) = \mathrm{E}$$

следва, че $\mathrm{E} - B$ е дясна обратна матрица на $\mathrm{E} - A$. Понеже матриците са квадратни, от съществуването на дясна обратна матрица следва, че $\mathrm{E} - A$ е обратима и

$$(\mathrm{E} - A)^{-1} = \mathrm{E} - B.$$

в) От б) получаваме също

$$(\mathrm{E} - B)(\mathrm{E} - A) = \mathrm{E}.$$

Следователно

$$\mathrm{E} - A - B + BA = \mathrm{E},$$

т. е.

$$A + B = BA.$$

Но по условие

$$A + B = AB.$$

Затова

$$AB = BA.$$

Задача 2. Дадена е параболата

$$\pi : y = x^2 + x.$$

Да се докаже, че за всяка точка M от π, различна от върха на π, съществува точка N от π такава, че допирателните към π в точките M и N са ортогонални. Ако тези допирателни се пресичат в точка K, да се определи лицето на триъгълника $\triangle MNK$ чрез ъгловия коефициент на допирателната през M.

Решение. За точка от параболата с абсциса t имаме

$$y(t) = t^2 + t, \qquad y'(t) = 2t + 1.$$

Уравнението на допирателната в тази точка е

$$y - (t^2 + t) = (2t + 1)(x - t),$$

откъдето

$$y = (2t + 1)x - t^2.$$

Нека

$$M(u) = (u, u^2 + u), \qquad N(v) = (v, v^2 + v).$$

Ъгловите коефициенти на допирателните са съответно

$$m_1 = 2u + 1, \qquad m_2 = 2v + 1.$$

Условието за ортогоналност е

$$(2u + 1)(2v + 1) = -1.$$

Ако M не е върхът на параболата, тогава $2u + 1 \neq 0$. Следователно съществува единствено число v, за което

$$2v + 1 = -\frac{1}{2u + 1}.$$

Така съществува единствена точка N от параболата с исканото свойство.

Намираме точката K като пресечна точка на допирателните

$$y = (2u + 1)x - u^2,$$

$$y = (2v + 1)x - v^2.$$

Приравняваме десните страни:

$$(2u + 1)x - u^2 = (2v + 1)x - v^2.$$

Оттук

$$2(u - v)x = (u - v)(u + v).$$

Понеже $u \neq v$, получаваме

$$x_K = \frac{u + v}{2}.$$

Тогава

$$y_K = (2u + 1)\frac{u + v}{2} - u^2 = uv + \frac{u + v}{2}.$$

Следователно

$$K\left(\frac{u + v}{2}, uv + \frac{u + v}{2}\right).$$

Лицето на триъгълника се намира чрез детерминанта:

$$[\triangle MNK] = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} v-u & v^2+v-u^2-u \\ \dfrac{u+v}{2}-u & uv+\dfrac{u+v}{2}-u^2-u \end{pmatrix}\right|.$$

След опростяване се получава

$$[\triangle MNK] = \frac{1}{4}|v-u|^3.$$

Нека $m = 2u+1$ е ъгловият коефициент на допирателната в точката M. Тогава

$$2v+1 = -\frac{1}{m}.$$

Следователно

$$v-u = \frac{-\frac{1}{m}-1}{2} - \frac{m-1}{2} = -\frac{1}{2}\left(m+\frac{1}{m}\right).$$

Затова

$$[\triangle MNK] = \frac{1}{4}\left|-\frac{1}{2}\left(m+\frac{1}{m}\right)\right|^3 = \frac{(m^2+1)^3}{32|m|^3}.$$

Окончателно

$$\boxed{[\triangle MNK] = \frac{(m^2+1)^3}{32|m|^3}}.$$

Задача 3. Дадена е функцията

$$f(x) = e^{-x}(ax+1),$$

където a е реален параметър.

а) Да се намери най-голямата стойност на $f(x)$ при $a = 2$.

б) Да се докаже, че $0 \le f(x) \le 1$ за всяко $a \in [0,1]$ и за всяко $x \ge 0$.

Решение. а) При $a = 2$ функцията е

$$f(x) = e^{-x}(2x+1).$$

Тя е дефинирана, диференцируема и непрекъсната за всяко $x \in (-\infty, +\infty)$.

Намираме производната:

$$f'(x) = e^{-x}(-2x+1).$$

Критичната точка е

$$-2x+1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}.$$

Понеже $f'(x) > 0$ за $x < \dfrac{1}{2}$ и $f'(x) < 0$ за $x > \dfrac{1}{2}$, функцията достига максимум при $x = \dfrac{1}{2}$.

Имаме

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-1/2}\left(2\cdot\frac{1}{2}+1\right) = 2e^{-1/2} = \frac{2}{\sqrt{e}} = \frac{2\sqrt{e}}{e}.$$

Освен това

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x}(2x+1) = -\infty,$$

а

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}(2x+1) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Следователно намереният максимум е абсолютен и най-голямата стойност на функцията е

$$\boxed{f_{\max} = \frac{2\sqrt{e}}{e}}.$$

б) Нека $a \in [0,1]$ и $x \geq 0$. Тогава

$$e^{-x} > 0$$

и

$$ax + 1 \geq 1 > 0.$$

Следователно

$$f(x) = e^{-x}(ax+1) \geq 0.$$

Остава да докажем, че $f(x) \leq 1$.

Производната е

$$f'(x) = e^{-x}(-ax + a - 1).$$

Понеже $a \in [0,1]$ и $x \geq 0$, имаме

$$-ax + a - 1 = a(1-x) - 1 \leq a - 1 \leq 0.$$

Следователно

$$f'(x) \leq 0$$

за всяко $x \geq 0$. Значи f е намаляваща в интервала $[0, +\infty)$ и

$$f(x) \leq f(0) = 1.$$

Така за всяко $a \in [0,1]$ и всяко $x \geq 0$ е изпълнено

$$\boxed{0 \leq f(x) \leq 1}.$$

Задача 4. Пресметнете интеграла

$$I = \int_2^{2026} \frac{\ln(x-1)}{x^2 - 2x + 2026}\,\mathrm{d}x.$$

Решение. Полагаме

$$y = x - 1, \qquad \mathrm{d}y = \mathrm{d}x.$$

Тогава

$$x^2 - 2x + 2026 = (x-1)^2 + 2025 = y^2 + 2025.$$

При $x = 2$ получаваме $y = 1$, а при $x = 2026$ получаваме $y = 2025$. Следователно

$$I = \int_1^{2025} \frac{\ln y}{y^2 + 2025}\,\mathrm{d}y.$$

Сега полагаме

$$y = 45z, \qquad \mathrm{d}y = 45\,\mathrm{d}z.$$

Границите стават

$$y = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{45}, \qquad y = 2025 \Rightarrow z = 45.$$

Тогава

$$\begin{aligned} I &= \int_{1/45}^{45} \frac{\ln(45z)}{2025z^2 + 2025}\, 45\, \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{45} \int_{1/45}^{45} \frac{\ln(45z)}{z^2+1}\, \mathrm{d}z \\ &= \frac{\ln 45}{45} \int_{1/45}^{45} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1} + \frac{1}{45} \int_{1/45}^{45} \frac{\ln z}{z^2+1}\, \mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Ще покажем, че

$$\int_{1/45}^{45} \frac{\ln z}{z^2+1}\, \mathrm{d}z = 0.$$

Наистина, чрез субституцията $z = \dfrac{1}{t}$ получаваме

$$\int_{1/45}^{45} \frac{\ln z}{z^2+1}\, \mathrm{d}z = -\int_{1/45}^{45} \frac{\ln t}{t^2+1}\, \mathrm{d}t.$$

Следователно този интеграл е равен на противоположния си и затова е равен на 0.

Остава

$$I = \frac{\ln 45}{45} \int_{1/45}^{45} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1}.$$

Следователно

$$I = \frac{\ln 45}{45} \left(\operatorname{arctg} 45 - \operatorname{arctg} \frac{1}{45} \right).$$

НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

Боровец, 15-17 май 2026 г.

Група B

Всяка задача се оценява с максимум 10 точки

Задача 1. Дадени са матриците $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ и $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, където a е реален параметър.

а) Да се намерят стойностите на a, за които матрицата T е обратима и матрицата $T^{-1}AT$ е диагонална.

б) Да се намери A^{2026}.

Решение. а) Матрицата T е обратима, ако $\det(T) \neq 0$, т. е. $a \neq 0$ и $\det(T) = a$. Тогава:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{a} \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

Матрицата $D = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{a} \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a-2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ е диагонална при $a = 1$.

б) За $a = 1$ имаме $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Като използваме, че $A = TDT^{-1}$, получаваме $A^k = TDT^{-1}TDT^{-1} \dots TDT^{-1} = TD^kT^{-1}$. Тъй като $D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$, то:

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3^k - 1 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}.$$

Следователно $A^{2026} = \begin{pmatrix} 1 & 3^{2026} - 1 \\ 0 & 3^{2026} \end{pmatrix}$

Забележка. A^k може да се пресметне и директно, без използване на равенството $A^k = TD^kT^{-1}$.

Задача 2. Да се намерят всички цели неотрицателни числа n, за които уравнението $nx^4 + 4x + 3 = 0$ има реален корен.

Решение. При $n = 0$ уравнението има реален корен.

Нека $n > 0$. Да разгледаме функцията $f(x) = a^3x^4 + 4x + 3$, където $a > 0$. Имаме:

$$f'(x) = 4(a^3x^3 + 1)$$

и оттук следва, че функцията е намаляваща в $\left(-\infty; -\frac{1}{a}\right]$ и растяща в $\left(-\frac{1}{a}; \infty\right)$. Тъй като $f'\left(-\frac{1}{a}\right) = 0$, $f(x)$ има абсолютен минимум в точката $x = -\frac{1}{a}$, то уравнението $f(x) = 0$ има

реален корен тогава и само тогава, когато $f\left(-\frac{1}{a}\right) \leq 0$. От друга страна

$$f\left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{3a-3}{a},$$

откъдето $f\left(-\frac{1}{a}\right) = 0$, когато $a = 1$.

Окончателно $n = 0$ и $n = 1$.

Задача 3. Нека функцията $f(x)$ е диференцируема за всяко $x \in (-\infty, +\infty)$ и $f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

а) Да се определят интервалите на монотонност, изпъкналост/вдлъбнатост и инфлексните точки на $f'(x)$.

б) Да се намерят асимптотите и да се скицира графиката на $f'(x)$.

в) Да се определят интервалите на монотонност и вида на локалните екстремуми на функцията $f(x)$.

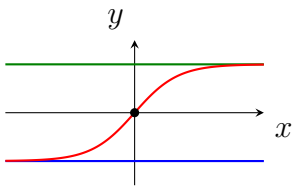
Решение.

а) Функцията $f'(x)$ е дефинирана, диференцируема, а следователно и непрекъсната за всяко $x \in (-\infty, +\infty)$. Производната $f''(x) = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} > 0$ за всяко $x \in (-\infty, +\infty)$ и следователно функцията $f'(x)$ е строго растяща в интервала $(-\infty, +\infty)$. Втората производна на функцията е $f'''(x) = \frac{2e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$, която е положителна за $x < 0$, отрицателна за $x > 0$ и $f'''(0) = 0$. Следователно $f'(x)$ е изпъкнала функция в $(-\infty, 0)$, вдлъбната в $(0, +\infty)$ и $(0, 0)$ е инфлексна точка.

б) Тъй като $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -1$, правата $y = -1$ е хоризонтална асимптота при $x \to -\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x + 1 - 2}{e^x + 1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{2}{e^x + 1}\right) = 1$ и следователно правата $y = 1$ е хоризонтална асимптота при $x \to +\infty$. Функцията $f'(x)$ няма вертикални асимптоти.

в) Тъй като $f'(x) < 0$ за всяко $x \in (-\infty, 0)$, $f'(x) > 0$ за всяко $x \in (0, +\infty)$ и $f'(0) = 0$, функцията $f(x)$ е строго намаляваща в интервала $(-\infty, 0)$, строго растяща в интервала $(0, +\infty)$ и при $x = 0$ има локален минимум.

Задача 4. В правоъгълна координатна система Oxy са дадени точките $A(6, 0)$, $B(-3, 0)$ и окръжност $k : x^2 + y^2 = 1$. Правата минава през точка B и пресича k в точките P и Q. Да се намери възможно най-голямото лице на триъгълника APQ.



Графика на функцията $f'(x)$

Решение. Нека правата l има уравнение $y = kx + n$. Тъй като точка $B(-3;0)$ лежи на нея, то $0 = -3k + n$, $n = 3k$, т.е. $l : y = kx + 3k$. Щом l пресича окръжността k в две точки, системата

$$\begin{cases} y = kx + 3k \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

има две решения, т.е. дискриминантата D на квадратното уравнение

$$x^2 + (kx + 3k)^2 = 1 \iff (1 + k^2)x^2 + 6k^2x + 9k^2 - 1 = 0$$

е положителна. Следователно

$$D = 36k^4 - 4(1 + k^2)(9k^2 - 1) = -32k^2 + 4 > 0, \quad k \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

Нека x_1 и x_2 са корените на квадратното уравнение. Тогава точка $P(x_1, k_1 + 3k)$, точка $Q(x_2, kx_2 + 3k)$ и лицето на триъгълника APQ е:

$$S_{APQ} = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 6 & 0 & 1 \\ x_1 & kx_1 + 3k & 1 \\ x_2 & kx_2 + 3k & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{9}{2}|k| \cdot |x_1 - x_2| = \frac{9}{2}|k| \frac{2\sqrt{1 - 8k^2}}{1 + k^2} = 9\sqrt{\frac{k^2 - 8k^4}{(1 + k^2)^2}}.$$

Полагаме $t = k^2, t \in \left(0, \frac{1}{8}\right)$ и търсим най-голямата стойност на функцията $f(t) = \frac{t - 8t^2}{(1 + t)^2}$ в интервала $\left(0, \frac{1}{8}\right)$. Първата й производна $f'(t) = \frac{(1 + t)(1 - 17t)}{(1 + t)^4}$ е равна на 0 за $t_1 = -1 \notin \left(0, \frac{1}{8}\right)$ и $t_2 = \frac{1}{17} \in \left(0, \frac{1}{8}\right)$, като $f'(t) > 0$ за $\left(0, \frac{1}{17}\right)$ и $f'(t) < 0$ за $\left(\frac{1}{17}, \frac{1}{8}\right)$. В интервала $\left(0, \frac{1}{8}\right)$ функцията $f(t)$ е непрекъсната и има единствен локален екстремум – максимум в точката $t = \frac{1}{17}$. Следователно най-голямата й стойност е $f\left(\frac{1}{17}\right) = \frac{1}{36}$.

Максималното лице на триъгълник APQ е равно на $9 \cdot \sqrt{\frac{1}{36}} = \frac{3}{2}$.