МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
РУСЕНСКИ УНИВЕРСИТЕТ „АНГЕЛ КЪНЧЕВ“
ФОНДАЦИЯ „ЕВРИКА“

НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

НСОМ 2025
16-18 май 2025 г.

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

РУСЕ

Група А

Задача 1. Да се пресметне границата:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+(-1)^n\sin\left(\pi\sqrt{1+2025\,n^2}\right)\right)^n.$$

Решение.

$$\sin\left(\pi\sqrt{1+2025\,n^2}\right)=(-1)^n\sin\left(\pi\sqrt{1+(45\,n)^2}-45\,n\pi\right)$$
$$=(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+(45\,n)^2}+45\,n}.$$

Следователно

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+(-1)^n\sin\left(\pi\sqrt{1+2025\,n^2}\right)\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+(45\,n)^2}+45\,n}\right)^n.$$

Тъй като

$$\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+(45\,n)^2}+45\,n}=\frac{\pi}{90},$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+(-1)^n\sin\left(\pi\sqrt{1+2025\,n^2}\right)\right)^n=e^{\pi/90}.$$

Задача 2. Нека A и B са квадратни матрици от ред n (n е цяло положително число) с реални елементи. Да се докаже, че съществува обратима квадратна матрица T от ред n с реални елементи, такава че $B=T^{-1}AT$ тогава и само тогава, когато съществува обратима квадратна матрица S от ред n с комплексни елементи, такава че $B=S^{-1}AS$.

Решение. Нека съществува обратима матрица T с реални елементи, такава че $B=T^{-1}AT$. Тогава за $S=T$, разглеждана като матрица с комплексни елементи е в сила $B=S^{-1}AS$. *(1 точка)*

Нека сега S е матрица с комплексни елементи, такава, че $B=S^{-1}AS$. Съществуват матрици P и Q, такива че $S=P+iQ$. *(1 точка)* От $B=S^{-1}AS$ имаме $SB=AS$ и $PB+iQB=(P+iQ)B=A(P+iQ)=AP+iAQ$. Приравнявайки реалната и имагинерната част получаваме, че $PB=AP$ и $QB=AQ$. *(1 точка)*

Да разгледаме полинома $f(x)=\det(P+tB)$. *(1 точка)* Това е ненулев полином ($f(i)\neq 0$). *(1 точка)* Следователно съществува $x_0\in\mathbb{R}$, за което $f(x_0)\neq 0$ *(1 точка)* и матрицата $T=P+x_0Q$ е обратима. *(1 точка)* Ясно е, че

$$TB=(P+x_0Q)B=PB+x_0QB=AP+x_0AQ=A(P+x_0Q)=AT.\,(1\text{ точка})$$

Оттук $B=T^{-1}AT$. *(2 точки)*

Задача 3. Да се докаже неравенството:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}dx < \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Решение. За всяко $x \geq 0$ са в сила неравенствата:

$$\sin x \leq x \quad \text{и} \quad \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Тогава

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}dx \leq \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \cdots \ldots \ldots = 1,$$

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}dx \geq \int_0^1 \frac{1-\frac{x^2}{2}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \cdots \ldots \ldots \ldots = \frac{3\pi}{8}.$$

Задача 4. Нека S е непразно, крайно, затворено относно умножението (произведението на всеки две матрици от S също е в S) множество от обратими квадратни матрици от ред n (n е цяло положително число), такова че сумата на матриците от S има следа 0. Да се докаже, че тази сума е нулевата матрица.
(Следа на матрица наричаме сумата от диагоналните ѝ елементи.)

Решение. Нека $B = \sum_{A \in S} A$. Умножението на елементите на S с произволен елемент на S ги пермутира. *(2 точки)* Следователно $B^2 = |S|B$. *(2 точки)* Тогава минималният полином на B е $m_B(x) \mid x^2 - |S|x$ *(2 точки)* и характеристичните корени на B са 0 или $|S|$. *(1 точка)* От $\operatorname{tr} B = 0$ следва, че всички характеристични корени на B са 0, *(2 точки)* и оттук, че $m_B = x$ и $B = 0$. *(1 точка)*

Група Б

Задача 1. Дадени са матриците $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&0\\3&1&2\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

а) Да се намери матрица X, за която $X.A=B$.

б) Да се намери матрица Y, за която $(YA)^{-1}=A^{-1}B$.

Решение. Непосредствено се намира, че матриците A и B са обратими, като

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&3&1\\0&1&0\\3&-5&-1\end{pmatrix} \text{ и } B^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&-2&2\\1&1&-1\end{pmatrix}.$$

а) От израза за A^{-1} следва $X=B.A^{-1}=\begin{pmatrix}6&-9&-2\\1&-2&0\\1&-1&0\end{pmatrix}$.

б) От равенството $(YA)^{-1}=A^{-1}B$ следва $YA=B^{-1}A$ и $Y=B^{-1}$.

Задача 2. Точките $A\left(1,\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$ и $B\left(\sqrt{2},\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$ лежат върху елипсата $\varepsilon:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

а) Да се намерят стойностите на полуосите a и b.

б) Да се намерят уравненията на допирателните t_A и t_B на ε в точките A и B.

в) Ако $t_A\cap Ox=P$, $t_B\cap Ox=Q$ и $t_A\cap t_B=C$, да се намери лицето на ΔPQC.

Решение. а) Като заместим координатите на точките A и B в уравнението на ε, получаваме системата уравнения

$$\left|\begin{array}{l}\frac{1}{a^2}+\frac{75}{4}.\frac{1}{b^2}=1,\\ 2.\frac{1}{a^2}+\frac{25}{2}.\frac{1}{b^2}=1.\end{array}\right.$$

След решаване на тази система получаваме $a=2$ и $b=5$.

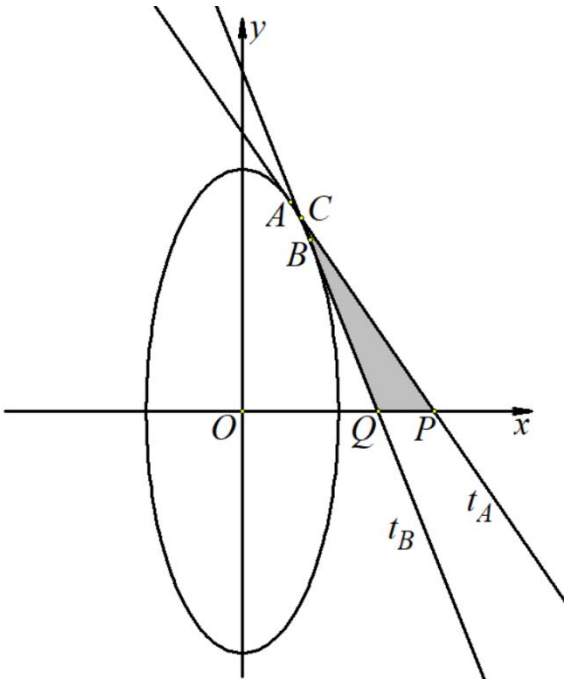
б) Уравнението на допирателна в произволна точка с координати (x_0,y_0) от ε е $\frac{x_0x}{4}+\frac{y_0y}{25}=1$. След прилагане на това равенство, за точките A и B получаваме

$$t_A:5x+2\sqrt{3}y-20=0,\ t_B:5x+2y-10\sqrt{2}=0.$$

в) От уравненията на правите t_A и t_B и уравнението $y=0$ на Ox лесно се получава, че $P(4,0)$ и $Q\left(2\sqrt{2},0\right)$. След решаване на системата уравнения

$$\left|\begin{array}{l}5x+2\sqrt{3}y-20=0,\\ 5x+2y-10\sqrt{2}=0,\end{array}\right.$$

получаваме $C\left(\frac{2\left(\sqrt{6}-2\right)}{\sqrt{3}-1},\frac{5\left(2-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{3}-1}\right)$.



От координатите на трите точки за лицето S на ΔPQC получаваме

$$S=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2\sqrt{2} & 0 & 1 \\ \frac{2\left(\sqrt{6}-2\right)}{\sqrt{3}-1} & \frac{5\left(2-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{3}-1} & 1 \end{vmatrix}\right|=5\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+1\right).$$

Забележка. Лицето може да се пресметне и така: $S=\frac{x_P-x_Q}{2}.y_C=\frac{5(2-\sqrt{2})^2}{\sqrt{3}-1}$.

Задача 3. а) Да се намери непрекъсната функция $f\left(x\right)$, дефинирана при $x\in\left(1,+\infty\right)$, за която е в сила равенството

$$\sin\left(\int_0^x f\left(t\right)dt\right)=\frac{2x}{1+x^2}.$$

б) За функцията $f\left(x\right)$ да се докаже, че е в сила неравенството

$$\sqrt{1+x^2}+f\left(x\right)>\frac{2}{5}.$$

Решение. а) От $\sin\left(\int_0^x f\left(t\right)dt\right)=\frac{2x}{1+x^2}$ следва $\int_0^x f\left(t\right)dt=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$. След диференциране на последното равенство се получава $f\left(x\right)=-\frac{2}{1+x^2}$.

б) Разглеждаме функцията $g(x)=\sqrt{1+x^2}-\frac{2}{1+x^2}$, $x\in(1,+\infty)$. От производната на $g(x)$ се вижда, че тя е монотонно растяща при $x\in(1,+\infty)$. Следователно $g(x)>g(1)=\sqrt{2}-1>\frac{2}{5}$.

Задача 4. Да се реши интегралът $\int\frac{1-2024x^{2025}}{\left(1+x+x^{2025}\right)^2}dx$.

Решение.

$$\int\frac{1-2024x^{2025}}{\left(1+x+x^{2025}\right)^2}dx=\int\frac{1+x+x^{2025}-x-2025x^{2025}}{\left(1+x+x^{2025}\right)^2}dx=$$

$$=\int\frac{1+x+x^{2025}}{\left(1+x+x^{2025}\right)^2}dx-\int\frac{x\left(1+2025x^{2024}\right)}{\left(1+x+x^{2025}\right)^2}dx=$$

$$=\int\frac{dx}{1+x+x^{2025}}-\int\frac{xd\left(1+x+x^{2025}\right)}{\left(1+x+x^{2025}\right)^2}=\int\frac{dx}{1+x+x^{2025}}+\int xd\frac{1}{1+x+x^{2025}}=$$

$$=\int\frac{dx}{1+x+x^{2025}}+\frac{x}{1+x+x^{2025}}-\int\frac{dx}{1+x+x^{2025}}=\frac{x}{1+x+x^{2025}}+C.$$

Група В

Задача 1. Дадена е матрицата $A=\begin{pmatrix} \frac{a+1}{2} & \frac{a-1}{2} \\ \frac{a-1}{2} & \frac{a+1}{2} \end{pmatrix}$. Да се намерят:

а) A^n и $\det\left(A^n\right)$;

б) $\sum\limits_{k=1}^{n} A^k$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} \det\left(A^k\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \det\left(A^k\right)}{\det\left(\sum\limits_{k=1}^{n} A^k\right)}$.

Решение. а) $A^2=\begin{pmatrix} \frac{a+1}{2} & \frac{a-1}{2} \\ \frac{a-1}{2} & \frac{a+1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{a+1}{2} & \frac{a-1}{2} \\ \frac{a-1}{2} & \frac{a+1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{a^2+1}{2} & \frac{a^2-1}{2} \\ \frac{a^2-1}{2} & \frac{a^2+1}{2} \end{pmatrix}$;

$A^3=\begin{pmatrix} \frac{a^2+1}{2} & \frac{a^2-1}{2} \\ \frac{a^2-1}{2} & \frac{a^2+1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{a+1}{2} & \frac{a-1}{2} \\ \frac{a-1}{2} & \frac{a+1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{a^3+1}{2} & \frac{a^3-1}{2} \\ \frac{a^3-1}{2} & \frac{a^3+1}{2} \end{pmatrix}$.

По индукция се доказва, че $A^n=\begin{pmatrix} \frac{a^n+1}{2} & \frac{a^n-1}{2} \\ \frac{a^n-1}{2} & \frac{a^n+1}{2} \end{pmatrix}$. $\det(A^n)=\frac{(a^n+1)^2}{4}-\frac{(a^n-1)^2}{4}=a^n$.

б) $\sum_{k=1}^{n} A^k=\begin{pmatrix} \frac{a+1}{2} & \frac{a-1}{2} \\ \frac{a-1}{2} & \frac{a+1}{2} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{a^2+1}{2} & \frac{a^2-1}{2} \\ \frac{a^2-1}{2} & \frac{a^2+1}{2} \end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix} \frac{a^n+1}{2} & \frac{a^n-1}{2} \\ \frac{a^n-1}{2} & \frac{a^n+1}{2} \end{pmatrix}$.

$\sum_{k=1}^{n} A^k=\begin{pmatrix} \frac{(\sum_{k=1}^{n} a^k)+n}{2} & \frac{(\sum_{k=1}^{n} a^k)-n}{2} \\ \frac{(\sum_{k=1}^{n} a^k)-n}{2} & \frac{(\sum_{k=1}^{n} a^k)+n}{2} \end{pmatrix}$, $\sum_{k=1}^{n} \det(A^k)=\sum_{k=1}^{n} a^k=\frac{a(a^n-1)}{a-1}$.

в) $\det(\sum_{k=1}^{n} A^k)=\left(\frac{(\sum_{k=1}^{n} a^k)+n}{2}\right)^2-\left(\frac{(\sum_{k=1}^{n} a^k)-n}{2}\right)^2=(\sum_{k=1}^{n} a^k).n=\frac{an(a^n-1)}{a-1}$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} det(A^k)}{\det(\sum_{k=1}^{n} A^k)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{a(a^n-1)}{a-1}}{\frac{an(a^n-1)}{a-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Задача 2. Точките $A\left(1,\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$ и $B\left(\sqrt{2},\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$ лежат върху елипсата $\varepsilon:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>0$ и $b>0$.

а) Да се намерят стойностите на a и b.

б) Да се намерят уравненията на допирателните t_A и t_B към ε в точките A и B.

в) Ако t_A пресича абсцисната ос в точка P, t_B пресича абсцисната ос в точка Q и t_A пресича t_B в точа C, да се намери лицето на ΔPQC.

Решение. а) Като заместим координатите на точките A и B в уравнението на ε, получаваме системата уравнения

$$\left|\begin{array}{l}\frac{1}{a^2}+\frac{75}{4}.\frac{1}{b^2}=1,\\ 2.\frac{1}{a^2}+\frac{25}{2}.\frac{1}{b^2}=1.\end{array}\right.$$

След решаване на тази система получаваме $a=2$ и $b=5$.

б) Уравнението на допирателна в произволна точка с координати (x_0,y_0) от ε е $\frac{x_0x}{4}+\frac{y_0y}{25}=1$. След прилагане на това равенство за точките A и B получаваме

$t_A:5x+2\sqrt{3}y-20=0$, $t_B:5x+2y-10\sqrt{2}=0$.

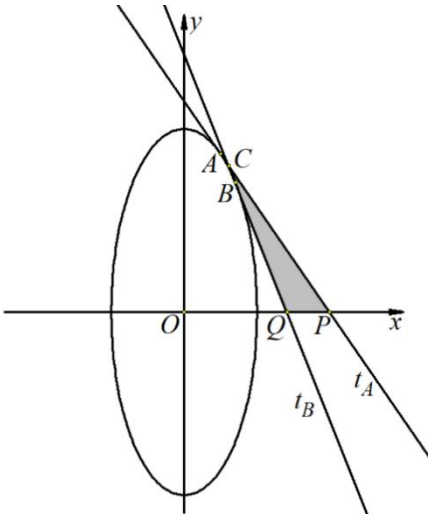
в) От уравненията на правите t_A и t_B, както и от уравнението $y=0$ на Ox лесно се получава, че $P(4,0)$ и $Q\left(2\sqrt{2},0\right)$. След решаване на системата уравнения

$$\left|\begin{array}{l}5x+2\sqrt{3}y-20=0,\\ 5x+2y-10\sqrt{2}=0,\end{array}\right.$$

получаваме $C\left(\frac{2\left(\sqrt{6}-2\right)}{\sqrt{3}-1},\frac{5\left(2-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{3}-1}\right)$.

От координатите на трите точки за лицето S на ΔPQC получаваме

$$S=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}4 & 0 & 1\\ 2\sqrt{2} & 0 & 1\\ \frac{2\left(\sqrt{6}-2\right)}{\sqrt{3}-1} & \frac{5\left(2-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{3}-1} & 1\end{vmatrix}\right|=5\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+1\right).$$



Задача 3. Дадена е функцията $f(x)=\ln\left(ax^2+1\right), a>0$.

а) При $a=1$ да се намерят най-голямата и най-малката стойности на $f(x)$ в интервала $[-2,1]$.

б) При $a=2$ да се намерят тези реални положителни стойности на b, при които допирателните към графиката на $f(x)$ в точките $(b, f(b))$ и $(-b, f(-b))$ са перпендикулярни.

в) Да се докаже, че за всяко $x\in\mathrm{R}$ е изпълнено неравенството $f(x)\le ax^2$.

Решение. а) Разглеждаме функцията $f(x)=\ln(x^2+1)$. Производната на функцията $f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ е отрицателна в интервала $(-\infty,0)$, положителна в интервала $(0,+\infty)$ и $f'(0)=0$. Следователно $f(x)$ има локален минимум в точката $x=0$ и $f_{min}=f(0)=0$. Пресмятаме стойностите на $f(x)$ в краищата на разглеждания интервал: $f(-2)=\ln 5$ и $f(1)=\ln 2$, откъдето получаваме:

$f_{min}=f(0)=0$ и $f_{max}=f(-2)=\ln 5$.

б) Разглеждаме функцията $f(x)=\ln(2x^2+1)$. Допирателната в точката $(b,f(b))$ има ъглов коефициент $k_1=f'(b)=\frac{4b}{2b^2+1}$, а допирателната в точката $(-b,f(-b))$ има ъглов коефициент $k_2=f'(-b)=\frac{-4b}{2b^2+1}$. От условието за перпендикулярност на двете допирателни $k_1k_2=-1$, получаваме уравнението $\frac{4b}{2b^2+1}.\frac{-4b}{2b^2+1}=-1$, от което определяме $b_{1,2}=\sqrt{\frac{3\pm2\sqrt{2}}{2}}=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

в) Разглеждаме функцията $F(x)=f(x)-ax^2=\ln(ax^2+1)-ax^2$, дефинирана за всяко x. Производната $F'(x)=\frac{2ax}{ax^2+1}-2ax=\frac{-2a^2x^3}{ax^2+1}$ е положителна в интервала $(-\infty,0)$, отрицателна в интервала $(0,+\infty)$ и $F'(0)=0$. Следователно $F(x)$ има абсолютен максимум за $x=0$ и $F_{max}=F(0)=0$, откъдето получаваме $F(x)=f(x)-ax^2\le 0$ за всяко x, с което неравенството е доказано (равенство се достига при $x=0$).

Задача 4. В началото на годината е открит срочен периодичен влог за срок от n години $(n \in \mathrm{N})$ с начална вноска 20 лв. Олихвяването на сумата по влога се извършва в края на всяка година с $p = 1\%$ сложна годишна лихва. В началото на всяка година от втората до n-тата, включително, по влога се прави вноска, която е с 10 лв. по-голяма от вноската през предходната година. Ако с S_n е означена натрупаната сума по влога в края на n-тата година, то да се намери $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^{n+1}}$.

Решение. Нека $q = 1 + \dfrac{p}{100}$. Тогава

$$S_n = 20q^n + (20+10)q^{n-1} + (20+2.10)q^{n-2} + \ldots + \left(20+(n-1).10\right)q =$$

$$= 20\left(q^n + q^{n-1} + \ldots + q\right) + 10\left(q^{n-1} + 2q^{n-2} + \ldots + (n-1)q\right) =$$

$$= 20q\frac{q^n-1}{q-1} + 10q^{n-1}\left(1 + \frac{2}{q} + \ldots + \frac{n-1}{q^{n-2}}\right) = 20q\frac{q^n-1}{q-1} + 10\frac{q(q^n - nq + n - 1)}{(q-1)^2} =$$

$= \dfrac{10}{(q-1)^2}\left(2q^{n+2} - q^{n+1} - (n+2)q^2 + (n+1)q\right)$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{q^{n+1}} = \dfrac{10}{(q-1)^2}(2q-1)$. При $p = 1\%$ се получава $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{q^{n+1}} = \dfrac{10}{(1,01-1)^2}(2.1,01-1) = 102000$.

Забележка. Нека $K = q^{n-1} + 2q^{n-2} + \ldots + (n-1)q = q^{n-1}\left(1 + \dfrac{2}{q} + \ldots + \dfrac{n-1}{q^{n-2}}\right)$. Ако

$f(x) = x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \dfrac{x^n - x}{x-1}$, ($x \neq 1$), то

$f'(x) = 1 + 2x + \ldots + (n-1)x^{n-2} = \dfrac{(n-1)x^n - nx^{n-1} + 1}{(x-1)^2}$, откъдето

$K = q^{n-1}.f'\left(\dfrac{1}{q}\right) = \dfrac{q\left(q^n - nq + n - 1\right)}{(q-1)^2}$.