НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

Равда, 13–15 май 2022 г.

Група А

Задача 1. Дадена е редицата $a_0 = a_1 = 1$, $a_{n+1} = 1 + \frac{a_1^2}{a_0} + ... + \frac{a_n^2}{a_{n-1}}$. Да се намери

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n}.$$

Решение: По индукция се доказва, че $a_n = n!$. Тогава

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n} = e.$$

Задача 2. Нека функцията f притежава непрекъсната втора производна.

а) Докажете, че ако за всеки две реални числа a и b е изпълнено

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(a),$$

то $f(x)$ е полином от първа степен.

б) Докажете, че ако за всеки две реални числа x и h е изпълнено

$$f(x+h) - f(x) = hf'\left(x + \frac{h}{2}\right),$$

то $f(x)$ е полином от втора степен.

Решение:

а) При фиксирано $a \in \mathbb{R}$ полагаме $b = x$ и получаваме $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) = xf'(a) + f(a) - af'(a) = Ax + B$, където $A = f'(a)$ и $f(a) - af'(a)$. Така $f(x)$ е полином от първа степен

б) При фиксирано x диференцираме двете страни на равенството по h и получаваме $f'(x+h) = f'\left(x + \frac{h}{2}\right) + \frac{h}{2}f''\left(x + \frac{h}{2}\right)$, откъдето $f'(x+h) - f'\left(x + \frac{h}{2}\right) = \frac{h}{2}f''\left(x + \frac{h}{2}\right)$.
Полагаме в последното равенство $b = x+h$ $a = a + \frac{h}{2}$ и получаваме $f'(b) - f'(a) = (b-a)f''(a)$, и от подточка а) имаме, че функцията $f'(x)$ е полином от първа степен, което означава, че функцията е полином от втора степен.

Задача 3. За функцията $f : [0, \pi/4] \to [0, \infty)$ е изпълнено $x = f(x) \operatorname{arctg} f(x)$ за всяко $x \in [0, \pi/4]$.

а) Да се докаже, че функцията $f(x)$ е строго монотонно растяща.

б) Да се пресметне

$$\int_0^{\pi/4} f(x)\, dx.$$

Решение: а) Функцията $g(x) = x \operatorname{arctg} x$ е строго монотонно растяща понеже $g'(x) > 0,\ x > 0$. Да допуснем, че за някои $0 \leq x_1 < x_2$ е в сила $f(x_1) > f(x_2)$. Тогава $x_1 = g(f(x_1)) > g(f(x_2)) = x_2$ - противоречие.

б)

$$I = \int_0^{\pi/4} f(x)\, dx = \int_0^{\pi/4} f(x)\, df(x) \operatorname{arctg}\ f(x)$$

Правим субституцията $y = f(x)$. Замествайки $x = 0$ и $x = \pi/4$ в $x = f(x) \operatorname{arctg}\ f(x)$, получаваме $f(0) = 0$ и $f(\pi/4) = 1$, тъй като функцията $y \operatorname{arctg} y$ е строго растяща. Следователно,

$$I = \int_{f(0)}^{f(\pi/4)} y\, d(y\ \operatorname{arctg} y) = \int_0^1 \left(y\ \operatorname{arctg} y + \frac{y^2}{1+y^2} \right)\, dy = \frac{1}{2} y^2\ \operatorname{arctg} y \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{y^2\, dy}{1+y^2} = \frac{1}{2}.$$

НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

Равда, 13–15 май 2022 г.

Група Б

Задача 1. Дадена е детерминантата

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^3 & x^2 & x \\ -x & 2x & 3x^2 \end{vmatrix}.$$

а) Да се реши уравнението $\Delta(x) = 0$.

б) Да се пресметне лицето на частта от равнината, заградена от кривите $y = f(x)$ и $y = 6 - f(x)$, където

$$f(x) = \Delta(x)\left(\frac{1}{x^2(x^2-x-2)} + \frac{1}{x^2(x^2-1)} - \frac{1}{(x^2-x-2)(x^2-1)}\right).$$

Решение:

а) Пресмятаме $\Delta(x)$ и получаваме

$$\Delta(x) = -x^2(x+1)^2(x-1)(x-2).$$

Тогава различните решения на уравнението са $x = 0, x = -1, x = 1, x = 2$.

б) За $f(x)$ получаваме $f(x) = -x^2 + x + 3$ и тогава търсеното лице е

$$\int\limits_0^1 (2f(x) - 6)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}.$$

Задача 2. Спрямо координатната система Oxy са дадени параболата $y = kx^2$ и окръжността $x^2 + y^2 = 1$, които се пресичат в точките M и N. Да се намери лицето на фигурата, която параболата отсича от окръжността за онази стойност на параметъра k, за която височината на триъгълник OMN към страната MN има дължина $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение: От условието разстоянието от O до MN да е $\frac{\sqrt{2}}{2}$ следва, че ординатите на точките M и N са равни на $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Тогава $k = \sqrt{2}$.

От съображения за симетрия е достатъчно да се пресметне търсеното лице само в първи квадрант. Така за лицето S имаме

$$S = 2\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{2}\right)\,\mathrm{d}x.$$

След пресмятане на интеграла окончателно получаваме $S = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{6}$.

Задача 3. Дадена е функцията $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x$.

а) Да се намери броят на корените на уравнението $f(x) = 0$.

б) Да се докаже, че $f(x) \le x$ за $x \ge 0$.

в) Да се намерят асимптотите на функцията $g(x)$, обратна на $f(x)$.

Решение: а) Очевидно $f(x)$ е непрекъсната нечетна функция и $x = 0$ е решение. Тогава е достатъчно да определим броя на корените на уравнението $f(x) = 0$ в интервала $(0, +\infty)$. От $f_{\max} = f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) > 0$, $f(x)$ намаляваща за $x \in \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ и $f(\sqrt{3}) < 0$ следва, че $f(x)$ има точно една нула в $x \in \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$. Следователно общият брой на корените на уравнението $f(x) = 0$ е три.

б) Доказателството следва от $f_{\max} = f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{3\sqrt{3} - \pi}{6} < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ за $x \in (0, +\infty)$.

в) От симетрията на графиките на функциите $f(x)$ и $g(x)$ относно правата $y = x$ следва, че и техните асимптоти също са симетрични относно тази права. Тъй като асимптотите на $f(x)$ са правите $x = \dfrac{\pi}{2}$ и $x = -\dfrac{\pi}{2}$, то търсените асимптоти на функцията $g(x)$ са правите $y = \dfrac{\pi}{2}$ и $y = -\dfrac{\pi}{2}$.

Задача 4. Да се пресметне интегралът

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{1 + 2022^{\operatorname{arctg} x}} dx.$$

Решение:

Правейки субституцията $x = -y$, получаваме

$$I = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{1 + 2022^{\operatorname{arctg} x}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos y}{1 + 2022^{-\operatorname{arctg} y}}\,\mathrm{d}y = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{2022^{\operatorname{arctg} y} \cos y}{1 + 2022^{\operatorname{arctg} y}}\,\mathrm{d}y.$$

Тогава

$$I = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x - I.$$

НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

Равда, 13–15 май 2022 г.

Група B

Задача 1. Дадена е функцията $f(x) = \begin{vmatrix} x & a & 2x \\ 3x & a & 4x \\ 5x & 6x & a \end{vmatrix}$, където a е реален параметър.

а) Да се реши уравнението $f(x) = 0$ при $a = 2022$;

б) Да се намери стойността на параметъра a, при условие че точката $A(5, 2022)$ лежи върху графиката на функцията $y = f'(x)$.

Решение: След пресмятане на детерминантата получаваме $f(x) = 12x^3 + 10ax^2 - 2a^2x$, което след изнасяне на x пред скоби и разлагане на квадратния тричлен в скобите води до $f(x) = 2x(x + a)(6x - a)$.

а) Така корените на уравнението $f(x) = 0$ са $x = 0$, $x = -a$, $x = \frac{a}{6}$. Сега при $a = 2022$ получаваме $x = 0$, $x = -2022$, $x = \frac{2022}{6} = 337$.

б) За производната на $f(x)$ имаме $f'(x) = 36x^2 + 20ax - 2a^2$. Понеже точката $A(5, 2022)$ лежи на графиката на функцията $y = f'(x)$, то имаме $f'(5) = 36 \cdot 5^2 + 20a \cdot 5 - 2a^2 = 2022$ или $a^2 - 50a + 561 = 0$, откъдето получаваме $a = 17$ или $a = 33$.

Задача 2. Даден е триъгълник ABC, за който $A(-10, -2)$. Върху правите с уравнения $h_1 : x + 5y - 10 = 0$ и $h_2 : 5x + y + 22 = 0$ лежат две от височините на триъгълника. Да се намерят:

а) координатите на върховете B и C;

б) уравнението на описаната около триъгълника ABC окръжност k;

в) точките от окръжността k, които са равноотдалечени от медицентъра G и ортоцентъра H на триъгълника ABC.

Решение: а) С непосредствена проверка се забелязва, че координатите на точката A не удовлетворяват уравненията на правите h_1 и h_2, което означава, че тези прави не минават през върха A на триъгълника ABC. Нека h_1 и h_2 са височините съответно през върховете B и C. Тогава правите AC и AB минават през точката A и са перпендикулярни съответно на h_1 и h_2, т.е. на векторите $\overrightarrow{h_1}(5, -1)$ и $\overrightarrow{h_2}(1, -5)$. Оттук следва, че уравненията на правите AC и AB са следните: $AC : 5x - y + 48 = 0$; $AB : x - 5y = 0$. Тъй като $B = h_1 \cap AB$ и $C = h_2 \cap AC$, координатите на тези точки са решения съответно на системите $\left| \begin{array}{l} x + 5y - 10 = 0 \\ x - 5y = 0 \end{array} \right.$ и $\left| \begin{array}{l} 5x + y + 22 = 0 \\ 5x - y + 48 = 0 \end{array} \right.$. Откъдето получаваме $B(5, 1)$ и $C(-7, 13)$.

б) Нека B_0 и C_0 са средите съответно на страните AC и AB. От намерените координати на върховете B и C получаваме $B_0\left(-\frac{17}{2}, \frac{11}{2}\right)$ и $C_0\left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Ако s_b и s_c са симетралите съответно на страните AC и AB, то те са определени съответно от точките B_0 и C_0 и съответните си колинеарни вектори $\overrightarrow{h_1}(5, -1)$ и $\overrightarrow{h_2}(1, -5)$. Така получаваме, че $s_b : x + 5y - 19 = 0$, $s_c : 5x + y + 13 = 0$. Системата, образувана от тези две уравнения, води до координатите на центъра O на k. Така получаваме $O\left(-\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$. Освен това радиусът R на k е $R = OC = \sqrt{\frac{169}{2}}$. Следователно уравнението на описаната окръжност k е $\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{169}{2}$.

в) Координатите на ортоцентъра H определяме като решение на системата, образувана от уравненията на височините h_1 и h_2, така получаваме $H(-5,3)$. За координатите x_G и y_G на медицентъра G са изпълнени равенствата $x_G = \frac{x_A+x_B+x_C}{3}$ и $y_G = \frac{y_A+y_B+y_C}{3}$. От тези равенства получаваме $G(-4,4)$. Следователно за средата M на отсечката GH имаме $M\left(-\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right)$. Точките върху k, които са равноотдалечени от G и H лежат върху симетралата s на отсечката GH. Правата s е определена от точката M и нормалния вектор $\overrightarrow{HG} = (1,1)$. Така получаваме $s : x+y+1=0$. Сега от системата $\left| \begin{array}{l} \left(x+\frac{7}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{169}{2} \\ x+y+1=0 \end{array} \right.$, образувана от уравненията на S и k, получаваме, че търсените точки са $P\left(\frac{-9+\sqrt{165}}{2}, \frac{7-\sqrt{165}}{2}\right)$, $Q\left(\frac{-9-\sqrt{165}}{2}, \frac{7+\sqrt{165}}{2}\right)$.

Задача 3. Точка M лежи върху графиката на функцията $f(x) = 3x^3$, а точка N лежи върху графиката на функцията $g(x) = x-2$.

а) Да се намери броят на пресечните точки на графиките на $f(x)$ и $g(x)$;

б) Да се намери минималната дължина на отсечката MN, при условие че точките M и N имат неотрицателни абсциси.

Решение: а) Уравнението $f(x) = g(x)$ е еквивалентно на $3x^3 - x + 2 = 0$ или $(x+1)(3x^2-3x+2) = 0$ с единствено решение $x=-1$. Следователно двете графики имат една пресечна точка: $(-1,-3)$.

Забележка. Броят на пресечните точки може да се определи и като се изследва функцията $F(x) = 3x^3 - x + 2$.

б) Минималната дължина на отсечката MN е равна на разстоянието от правата $g : y = x-2$ до допирателната t към графиката на функцията $f(x)$, успоредна на g. Ъгловият коефициент на правата g е $k_g = 1$, а $f'(x) = 9x^2$. От равенството $1 = 9x^2$ и условието за неотрицателност на абсцисата на точка M намираме $x = \frac{1}{3}$, $y = 3.\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{9}$, т.е. $M\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}\right)$ и следователно най малката стойност $|MN_0|$ е равна на разстоянието от точка M до правата или $|MN_0| = \left|\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{9}-2}{\sqrt{2}}\right| = \frac{8\sqrt{2}}{9}$.

Задача 4. Дадена е матрицата $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

а) Да се докаже, че $A^3 = 3A^2 - 3A + E$;

б) Да се намери A^{2022}.

Решение: Сега ще пресметнем няколко последователни степени на матрицата A.
$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = A^2.A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^4 = A^3.A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^5 = A^4.A = \begin{pmatrix} 1 & 10 & -5 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и т.н.

Верността на равенството $A^3 = 3A^2 - 3A + E$ се проверява непосредствено.

Може да се за бележи следната зависимост $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 2k & 4k-k^2 \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Това твърдение може да се докаже просто по индукция.

Така окончателно получаваме $A^{2022} = \begin{pmatrix} 1 & 4044 & -4\,080\,396 \\ 0 & 1 & -2022 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ЖУРИ

Председател: доц. д-р Мая Микренска, УНСС – София

Членове:

1. доц. д-р Станислава Стоилова, УАСГ – София
2. проф. дпн Сава Гроздев, ВУЗФ – София
3. проф. д-р Росен Николаев, ИУ – Варна
4. проф. д-р Веселин Ненков, ВВМУ „Никола Йонков Вапцаров“ – Варна
5. доц. д-р Първан Първанов, СУ „Св. Климент Охридски“– София
6. доц. д-р Асен Божилов, СУ „Св. Климент Охридски“ – София
7. доц. д-р Петър Копанов, ПУ „Паисий Хилендарски“ – Пловдив
8. доц. д-р Татяна Маджарова, ВВМУ „Никола Йонков Вапцаров“ – Варна
9. доц. д-р Веселин Гушев, СУ „Св. Климент Охридски“ – София
10. доц. д-р Иван Гаджев, СУ „Св. Климент Охридски“ – София
11. доц. д-р Иван Йорданов, УНСС – София
12. доц. д-р Илияна Раева, РУ „Ангел Кънчев“ – Русе
13. гл. ас. д-р Йордан Петков, ИУ – Варна