МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

РУСЕНСКИ УНИВЕРСИТЕТ „АНГЕЛ КЪНЧЕВ“

ФОНДАЦИЯ „ЕВРИКА“

НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

Русе, 27 – 29 май 2016 г.

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Русе

2016

Националната студентска олимпиада по математика (НСОМ) е състезание по математика между студенти от бакалавърски или магистърски програми. От 1974 г. тя се организира ежегодно. Целта е да се повишава интересът на студентите към математиката и да се създават условия за обмен на опит сред преподавателските екипи. От 2010 г. НСОМ се провежда с любезното съдействие на Министерството на образованието и науката. Дългогодишен спонсор на Олимпиадата е Фондация „Еврика“. Право да участва в НСОМ като състезател, има всеки студент от бакалавърска или магистърска програма на висше училище в Република България.

ОРГАНИЗАЦИОНЕН КОМИТЕТ

Председател:

гл. ас. д-р Илияна Петрова Раева, РУ „Ангел Кънчев“- Русе

Членове:

1. **доц. д-р Евелина Илиева Велева, РУ „Ангел Кънчев“- Русе**
2. **доц. д-р Юрий Димитров Кандиларов, РУ „Ангел Кънчев“- Русе**
3. **доц. д-р Веселин Ненков Ненков, ТУ – Габрово**
4. **гл. ас. д-р Мая Стоянова Маркова, РУ „Ангел Кънчев“- Русе**
5. **гл. ас. д-р Иван Радославов Георгиев, РУ „Ангел Кънчев“- Русе**
6. **ас. Стефка Романова Караколева, РУ „Ангел Кънчев“- Русе**

НСОМ 2016

РУСЕНСКИ УНИВЕРСИТЕТ „АНГЕЛ КЪНЧЕВ“

ЖУРИ

ПРЕДСЕДАТЕЛ

ПРОФ. Д-Р ВЕЛИЗАР ТОДОРОВ ПАВЛОВ – РУ„АНГЕЛ КЪНЧЕВ“-РУСЕ

ЧЛЕНОВЕ

1. **ПРОФ. ДМН ГЕНО ПЕТКОВ НИКОЛОВ, СУ„СВ.КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“**
2. **ПРОФ. ДПН САВА ИВАНОВ ГРОЗДЕВ, ВУЗФ - С ОФИЯ**
3. **ПРОФ. Д-Р ВЛАДИМИР ТОДОРОВ ТОДОРОВ, УАСГ- СОФИЯ**
4. **ПРОФ. Д-Р ИВАН ДИМИТРОВ ТРЕНДАФИЛОВ, ТУ-СОФИЯ**
5. **ДОЦ. Д-Р ВЕСЕЛИН НЕНКОВ НЕНКОВ, ТУ-ГАБРОВО**
6. **ДОЦ. Д-Р ВЛАДИМИР ДИМИТРОВ БАБЕВ, СУ„СВ.КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“**
7. **ДОЦ. Д-Р РОСЕН НИКОЛАЕВ НИКОЛАЕВ, ИУ-ВАРНА**
8. **ДОЦ. Д-Р АСЕН ИВАНОВ БОЖИЛОВ, СУ„СВ.КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“**
9. **ГЛ.АС. Д-Р ИЛИЯНА ПЕТРОВА РАЕВА, РУ „АНГЕЛ КЪНЧЕВ“**
10. **ГЛ.АС. Д-Р ПЕТЪР ИВАНОВ КОПАНОВ, ПУ „ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ“**
11. **АС. ПЕТЪР ВАСИЛЕВ СТОЕВ, УАСГ-СОФИЯ**

НАЦИОНАЛНА КОМИСИЯ

ПРЕДСЕДАТЕЛ:

1. **ПРОФ. ДПН САВА ИВАНОВ ГРОЗДЕВ, ВУЗФ-СОФИЯ**

ЧЛЕНОВЕ:

2. **ПРОФ. ДМН ГЕНО ПЕТКОВ НИКОЛОВ, СУ„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“**
3. **ПРОФ. Д-Р ВЛАДИМИР ТОДОРОВ ТОДОРОВ, УАСГ-СОФИЯ**
4. **ПРОФ. Д-Р ИВАН ДИМИТРОВ ТРЕНДАФИЛОВ, ТУ-СОФИЯ**
5. **ДОЦ. Д-Р ВЕСЕЛИН НЕНКОВ НЕНКОВ, ТУ-ГАБРОВО**
6. **ДОЦ. Д-Р РОСЕН НИКОЛАЕВ НИКОЛАЕВ, ИУ-ВАРНА**
7. **ДОЦ. Д-Р АСЕН ИВАНОВ БОЖИЛОВ, СУ„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“**
8. **ГЛ.АС. Д-Р ИЛИЯНА ПЕТРОВА РАЕВА, РУ „АНГЕЛ КЪНЧЕВ“-РУСЕ**
9. **ГЛ.АС. Д-Р ПЕТЪР ИВАНОВ КОПАНОВ, ПУ „ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ“**

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

РУСЕНСКИ УНИВЕРСИТЕТ „АНГЕЛ КЪНЧЕВ“

ФОНДАЦИЯ „ЕВРИКА“

НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

НСОМ 2016

27-29 май, 2016 г.

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Русе

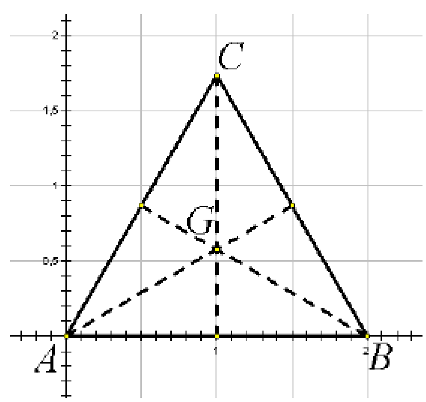
ГРУПА А

✎ **Задача 1** *Пресметнете най-малката стойност на израза*

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2}.$$

Решение: Нека $M(x,y)$ е точка от равнината. Точките $A(0,0)$, $B(2,0)$ и $C\left(1,\sqrt{3}\right)$ са върхове на триъгълник, който е равностранен със страна 2. Очевидно изразът от условието е равен на $|AM|+|BM|+|CM|$. Добре известно е, че във всеки остроъгълен триъгълник има единствена точка M, за която тази сума е минимална.

Ако триъгълникът е равностранен, тази точка е центърът му $G\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\equiv M_0$, където M_0 е точката, в която се достига най-малката стойност $=2\sqrt{3}$. ❏



✎ **Задача 2** *Възможно ли е рационалните числа в $(0,1)$ да бъдат номерирани*

$$(r_1,\, r_2,\, r_3,\, \ldots\, r_n,\, \ldots\,),$$

така че редът $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(r_n)^n$ *да е:*

а) разходящ;

б) сходящ;

в) сходящ със сума по-малка от $\dfrac{1}{2016!}$ *?*

Решение: а) Да. Полагаме $r_{2n} = 1 - \dfrac{1}{2n}$. Останалите рационални числа в $(0,1)$ номерираме по произволен начин с нечетните естествени числа. Понеже $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)^{2n} = \dfrac{1}{e} > 0$, то редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(r_n)^n$ е разходящ съгласно необходимото условие на Коши.

б), в) Да. Нека $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap (0,1)$ е произволна биекция (номериране на рационалните числа, $r_n = f(n)$). За произволно $\varepsilon > 0$ ще построим биекция $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, за която $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(f(g(n)))^n < 2\varepsilon$. Полагаме $g(1) = 1$. Ако $g(1),\ g(2),\ \dots,\ g(k-1)$ $(2 \le k)$ вече са избрани, полагаме

$$g(k) = \min\left\{f^{-1}\left(\mathbb{Q}\cap\left(0,\sqrt[k]{\frac{\varepsilon}{k^2}}\right)\right) \setminus \{g(1),\ g(2),\ \dots,\ g(k-1)\}\right\}.$$

Понеже рационалните числа във всеки интервал са безбройно много, то g е добре дефинирана и $g(m) \neq g(l)$ за $m \neq l$. Да допуснем, че множеството $\mathbb{N}\setminus g(\mathbb{N})$ не е празно и да означим с n_0 най-малкия му елемент. Имаме $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{\dfrac{\varepsilon}{k^2}} = 1$, откъдето множеството

$$\left\{k \in \mathbb{N} : f(n_0) < \sqrt[k]{\frac{\varepsilon}{k^2}} \text{ и } \{1,\ 2,\ \dots,\ n_0-1\} \subset \{g(1),\ g(2),\ \dots,\ g(k-1)\}\right\}$$

също не е празно. Неговият най-малък елемент m_0 удовлетворява $n_0 = g(m_0)$, противно на $n_0 \notin g(\mathbb{N})$. Полученото противоречие показва, че g е биекция.

От неравенството

$$(f(g(n)))^n < \frac{\varepsilon}{k^2}$$

за всяко $n \in \mathbb{N}$ следва

$$\sum_{n=1}^{\infty}(f(g(n))^n < \varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < 2\varepsilon,$$

с което доказателството е завършено. ❑

✎ **Задача 3** *а) Съществува ли матрица X с реални елементи, такава че* $X^{2016} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$*?*

б) Да се намерят всички матрици с реални елементи от вида $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$*, така че* $X^{2016} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

в) Да се намери най-малкото естествено число k, за което съществува матрица X от намерените в б), такава че $X^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение:

а) Не. От теоремата за детерминанта на произведение на матрици следва, че детерминантата на четна степен на реална матрица не може да е отрицателна.

б) Тъй като $|X|^{2016} = 1$, то $a^2+b^2 = 1$, т. е. съществува число φ така, че $a = \cos\varphi,\ b = \sin\varphi$. Тогава

$$X^{2016} = \begin{pmatrix} \cos 2016\varphi & \sin 2016\varphi \\ -\sin 2016\varphi & \cos 2016\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \text{т.е.}\ \left|\begin{array}{l} \cos 2016\varphi = 0 \\ \sin 2016\varphi = 1 \end{array}\right.$$

или $2016\varphi = \dfrac{\pi}{2}(1+4n)$, n – цяло, откъдето $\varphi = \dfrac{\pi}{4032}(1+4n)$.

в) Търсим най-малкото естествено k така, че

$k\varphi = \dfrac{\pi}{2}(1+4l)$, т.е. $1+4l = 32 \cdot 63(1+4l)$ за някои цели n и l. Следователно $k = 32p$.

При $p = 1$ равенството $1+4n = 63 \cdot (1+4l)$ е невъзможно, а при $p = 3$ можем да изберем $l = 1$ и $n = 26$.

Отговор: $k = 96$.

Забележка. Една естествена интерпретация на задачата е да разглеждаме влизащите в условия б) и в) матрици като комплексни числа: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ отговаря на имагинерната единица i, а $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ – на числото $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

❑

ГРУПА Б

✎ **Задача 1** *Дадена е детерминантата*

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 & ... & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x & ... & 1 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & 1 & 1 & ... & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 & x \end{vmatrix}.$$

а) Да се реши уравнението $D_3(\cos t) = 0$.

б) Да се докаже, че

$$D_n(x) = (x-1)^{n-1}(x+n-1)$$

и да се намерят локалните екстремуми на функцията $f(x) = D_n(x)$.

Решение: а)

$$D_3(\cos t) = \begin{vmatrix} \cos t & 1 & 1 \\ 1 & \cos t & 1 \\ 1 & 1 & \cos t \end{vmatrix} = \cos^3 t - 3\cos t + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos t - 1)^2 \cdot (\cos t + 2) = 0 \Rightarrow \cos t = 1 \Rightarrow t = 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z}.$$

б) Прибавяме всички стълбове от 2-рия до n-тия към първия стълб на детерминантата и получаваме

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x+n-1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ x+n-1 & x & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ x+n-1 & 1 & x & 1 & ... & 1 & 1 \\ x+n-1 & 1 & 1 & x & ... & 1 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ x+n-1 & 1 & 1 & 1 & ... & x & 1 \\ x+n-1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 & x \end{vmatrix}.$$

Сега умножаваме първия ред по (-1) и го прибавяме към останалите. Детерминантата се преобразува в триъгълна и

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x+n-1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x-1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x+n-1)\cdot(x-1)^{n-1}.$$

При $n=1$, $f(x)=x$ и няма локални екстремуми. При $n>1$,

$$f'(x) = n(x-1)^{n-2}(x+n-2).$$

Ако n – четно, то функцията $f(x)$ намалява за $x \in (-\infty, 2-n)$ и расте за $x \in (2-n, +\infty)$. Следователно

$$f_{\min}(x) = f(2-n) = (1-n)^{n-1}.$$

Ако n – нечетно, то функцията $f(x)$ расте за $x \in (-\infty, 2-n) \cup (1, +\infty)$ и намалява за $x \in (2-n, 1)$. Следователно

$$f_{\min}(x) = f(1) = 0 \quad \text{и} \quad f_{\max}(x) = f(2-n) = (1-n)^{n-1}.$$

❑

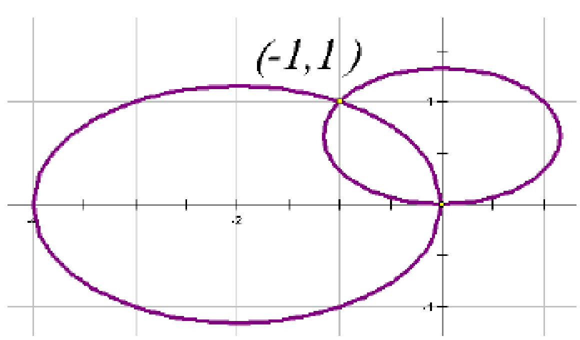
✎ **Задача 2** *За кои стойности на x и y е изпълнено неравенството*

$$\max\left\{x^2+3y^2, 4\right\} \le \min\left\{-4x, 4y\right\}$$

Решение:

$$\left|\begin{array}{l} x^2+3y^2 \le -4x \\ x^2+3y^2 \le 4y \\ 4 \le -4x \\ 4 \le 4y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x^2+4x+4+3y^2 \le 4 \\ x^2+3\left(y^2-\dfrac{4}{3}y+\dfrac{4}{9}\right) \le \dfrac{4}{3} \\ x \le -1 \\ y \ge 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \dfrac{(x+2)^2}{2^2} + \dfrac{y^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} \le 1 \\ \dfrac{(x+2)^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} + \dfrac{\left(y-\frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} \le 1 \\ x \le -1 \\ y \ge 1 \end{array}\right.$$

Единствената точка, удовлетворяваща системата неравенства е точката $(-1, 1)$ (виж фигурата). Следователно $x=-1$, $y=1$. ❑



✎ **Задача 3** *а) Пресметнете* $\int_1^e \sqrt{\ln x}\, dx + \int_0^1 e^{x^2}\, dx$

б) Ако $a \le b$*, да се докаже, че* $\int_a^b (x^2+1)e^{-x^2}\, dx \ge e^{-a^2} - e^{-b^2}$.

Решение: а) **I начин:** Да означим с $I_1 = \int_1^e \sqrt{\ln x}$, $I_2 = \int_0^1 e^{x^2}\, dx$.

Преобразуваме първия интеграл като направим смяна на променливите. За целта полагаме

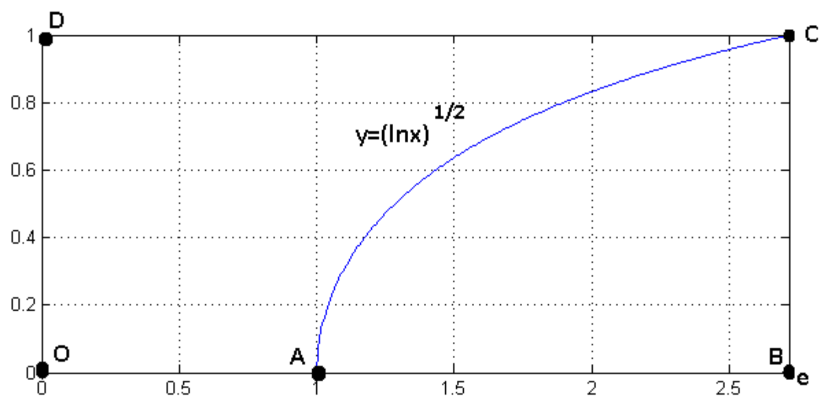
$$\sqrt{\ln x} = t \Rightarrow x = e^{t^2} \ , \quad dx = 2te^{t^2}\, dt$$ и

x	1	e
t	0	1

Откъдето получаваме

$$I_1 = \int_0^1 2t^2 e^{t^2}\, dt = \int_0^1 t\, de^{t^2} = te^t\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{t^2}\, dt = e - I_2 \Rightarrow I_1 + I_2 = e$$

II начин: Подинтегралните функции са взаимно обратни. Следователно двата интеграла се изразяват съответно чрез лицата на фигурите ABC и $ODCA$, които покриват правоъгълника $OBCD$. $S_{OBCD} = e \cdot 1 = e$. ❑



б) Тъй като $x^2 + 1 \ge 2x$, то

$$\int_a^b (x^2+1)e^{-x^2}\, dx \ge \int_a^b 2xe^{-x^2}\, dx = -\int_a^b d\left(e^{-x^2}\right) = e^{-a^2} - e^{-b^2} \ .$$

ГРУПА В

✎ **Задача 1** *Дадена е матрицата* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

а) *Да се пресметне* A^{2016}.

б) *Ако* M *е* 5×5 *матрица от цели числа и първите 22 члена на редицата* $\Delta_n = \det A^n$ *(*n*-естествено число) са нейни елементи, да се докаже, че* $\det M$ *е четно число.*

Решение: а) По индукция следва, че

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1-3^n}{2} & 3^n \end{pmatrix}$$

за всяко n и следователно

$$A^{2016} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1-3^{2016}}{2} & 3^{2016} \end{pmatrix}.$$

б) От а) следва, че $\Delta_n = 3^n$ и следователно поне 22 елемента на M са нечетни числа. Тъй като най-много 3 елемента на M са четни числа, то поне 2 нейни реда съдържат само нечетни числа. Ако прибавим единия от тези редове към другия, ще получим ред с четни числа. Развивайки детерминантата по този ред, заключаваме, че тя е четно число. ❑

✎ **Задача 2** *Дадени са точките* $A(-1,-1)$ *и* $B(3,3)$ *и окръжност*

$$k: \; x^2 + (y-5)^2 = R^2$$

с радиус R.

а) *Да се намери* R*, така че правата* AB *да се допира до* k.

б) *Ако* $R = 1$ *и точка* C *лежи на* k*, да се намери минималното лице на триъгълник* ABC.

Решение: а) Уравнението на правата AB е $y = x$. Системата

$$\left| \begin{array}{l} y = x \\ x^2 + (y-5)^2 = R^2 \end{array} \right.$$

трябва да има единствено решение, т.е. дискриминантата на уравнението $2x^2-10x+25-R^2=0$ трябва да е равна на нула, или $R=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

б) Лицето на триъгълник *ABC* е равно на

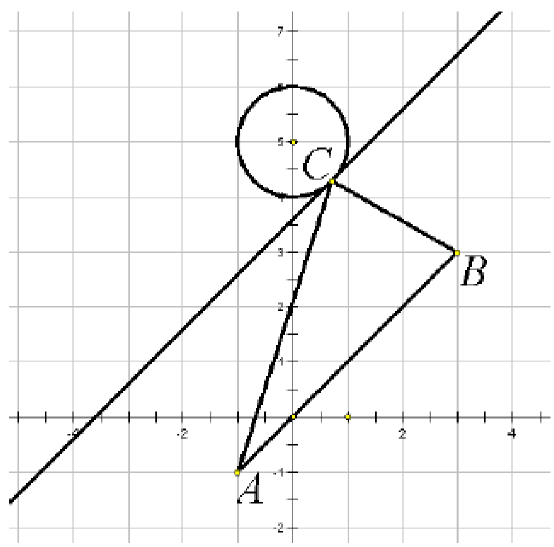
$$S(h_c)=\frac{|AB|\,.h_c}{2}=2\sqrt{2}\;h_c$$

и е минимално, когато дължината на височината h_c е минимална. Следователно, точка *C* лежи на по-близката допирателна *t* към окръжността, успоредна на правата *AB:* $y=x$. Уравнението на t е $y=x+n$, като *n* намираме от условието, системата

$$\left|\begin{array}{l} y=x+n \\ x^2+(y-5)^2=1 \end{array}\right.$$

да има едно решение, т.е. $n=5-\sqrt{2}$. Тогава

$$h_c=d(AB,t)=\frac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad \min S(h_c)=S\left(\frac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)=2\cdot(5-\sqrt{2}).$$



<u>Забележка</u>. Задачата може да се реши и чрез условен екстремум на функция. Ако означим $C(x_c,y_c)$, то следва да се намери минимумът на функцията $S(x_c,y_c)$ при условие

$$x_c^2+(y_c-5)^2=1.$$

✎ **Задача 3** *Нека* $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}+\cdots+\dfrac{1}{x+2016}$.

Да се намери броят на:

а) екстремумите на $f(x)$*;*

б) корените на уравнението $f(x)=0$*.*

Решение: Функцията $f(x)$ е дефинирана в

$$(-\infty,-2016)\cup(-2016,-2015)\cup\ldots(-2,-1)\cup(-1,0)\cup(0,\infty).$$

а) Пресмятаме производната

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} - \cdots - \frac{1}{(x+2016)^2} < 0.$$

Така във всеки от интервалите, от които е образувано дефиниционното множество, функцията $f(x)$ е строго намаляваща. Следователно $f(x)$ няма екстремуми.

б) За всеки от интервалите $(-k, -(k-1))$, където $k = 1, \dots, 2016$ пресмятаме дясната граница

$$\lim_{x \to -k+} f(x) = +\infty$$

и лявата граница

$$\lim_{x \to -(k-1)-} f(x) = -\infty.$$

Тъй като $f(x)$ е строго намаляваща във всеки от разглежданите интервали, тя се анулира в единствена точка от интервала.

$$\lim_{x \to -2016-} f(x) = -\infty.$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

и в интервала $(-\infty, -2016)$ уравнението няма корени.

За $x \in (0, \infty)$ очевидно $f(x) > 0$. Следователно броят на корените на уравнението $f(x) = 0$ е равен на броя на разгледаните интервали, т.е. на 2016. ❏

7017 Русе, ул. "Студентска" №8
http://www.uni-ruse.bg; secretary@uni-ruse.bg; тел.: 082-888 211; факс: 082-845 708

МЯСТО ЗА ВАШИТЕ БЕЛЕЖКИ

Русенски университет "Ангел Кънчев"

70 години

с лице към знанието, младостта и бъдещето

7017 Русе, ул. "Студентска" №8

http://www.uni-ruse.bg; secretary@uni-ruse.bg; тел.: 082-888 211; факс: 082-845 708

Катедра „Приложна математика и статистика“

РУСЕНСКИ УНИВЕРСИТЕТ „АНГЕЛ КЪНЧЕВ“

2016