

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА  
СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ  
ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – СОФИЯ

---

**НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА  
ОЛИМПИАДА  
ПО МАТЕМАТИКА**

СОЗОПОЛ, 30 МАЙ – 1 ЮНИ 2014 Г.

**ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ**

## НАЦИОНАЛНА КОМИСИЯ

проф. д-н Сава Иванов Гроздев, ВУЗФ – София – председател

проф. д-н Гено Петков Николов, СУ „Св. Климент Охридски“

проф. д-р Владимир Тодоров Тодоров, УАСГ – София

проф. д-р Русанка Георгиева Петрова, ШУ „Еп. Константин Преславски“

доц. д-р Иван Димитров Трендафилов, ТУ – София

доц. д-р Росен Николаев Николаев, ИУ – Варна

гл. ас. д-р Петър Иванов Копанов, ПУ „Паисий Хилендарски“

гл. ас. Асен Иванов Божилов, СУ „Св. Климент Охридски“

гл. ас. Паскал Николаев Пиперков, ВТУ „Св. св. Кирил и Методий“

## ЖУРИ

доц. д-р Иван Димитров Трендафилов, ТУ – София – председател

проф. д-н Гено Петков Николов, СУ „Св. Климент Охридски“

проф. д-н Людмил Иванов Каранджулов, ТУ – София

проф. д-н Сава Иванов Гроздев, ВУЗФ – София

проф. д-р Владимир Тодоров Тодоров, УАСГ – София

проф. д-р Русанка Георгиева Петрова, ШУ „Еп. Константин Преславски“

доц. д-р Веселин Ненков Ненков, ТУ – Габрово

доц. д-р Владимир Димитров Бадев, СУ „Св. Климент Охридски“

доц. д-р Росен Николаев Николаев, ИУ – Варна

гл. ас. д-р Илиана Петров Раева, РУ „Ангел Кънчев“

гл. ас. д-р Петър Иванов Копанов, ПУ „Паисий Хилендарски“

гл. ас. Асен Иванов Божилов, СУ „Св. Климент Охридски“

гл. ас. Паскал Николаев Пиперков, ВТУ „Св. св. Кирил и Методий“

## Група А

**Задача 1.** Дадена е диагоналната матрица

$$\mathbf{M} = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_m)$$

с детерминанта различна от 0.

а) Ако  $m = 2$ , да се намерят квадратни матрици  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  такива, че  $\mathbf{M} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$  и  $\det \mathbf{A} + \det \mathbf{B} = 2$ .

б) Ако  $m = 3$ , да се намерят квадратни матрици  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  такива, че  $\mathbf{M} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$  и  $\det \mathbf{A} + \det \mathbf{B} = a_3$ .

в) Да се докаже, че за всяко естествено число  $m$  съществуват квадратни матрици  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  такива, че  $\mathbf{M} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$  и

$$\det \mathbf{A} + \det \mathbf{B} = \begin{cases} 2, & \text{ако } m \text{ е четно,} \\ a_m, & \text{ако } m \text{ е нечетно.} \end{cases}$$

**Решение:** а) Например

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix}.$$

б) Например

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 1| & 0 & 0 \\ -1 & 0| & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0| & p & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1| & 0 & 0 \\ 1 & a_2| & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0| & q & \end{pmatrix},$$

където  $a_3 = p + q$ .

в) При  $m$  четно дадената матрица представяме по следния начин:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 1| & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0| & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0| & a_3 & 1| & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0| & -1 & 0| & \dots & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{m-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & -1| & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \underline{1} & \underline{a_2}| & \underline{0} & \underline{0} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \underline{0}| & 0 & -1| & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0| & \underline{1} & \underline{a_4}| & \dots & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \overline{0} & \overline{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \overline{1} & \overline{a_m} \end{pmatrix}.$$

При  $m$  нечетно и ако  $a_m = p + q$  имаме

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 1| & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \underline{-1} & \underline{0}| & \underline{0} & \underline{0} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0| & a_3 & 1| & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0| & \underline{-1} & \underline{0}| & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \overline{a_{m-2}} & \overline{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \overline{-1} & \overline{0} & \overline{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \overline{p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1| & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \underline{1} & \underline{a_2}| & \underline{0} & \underline{0} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{0}| & 0 & -1| & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0| & \underline{1} & \underline{a_4}| & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \overline{0} & \overline{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \overline{1} & \overline{a_{m-1}} & \overline{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \overline{q} \end{pmatrix}.$$

**Задача 2.** Даден е числовият ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 1) \left( \frac{2013}{2014} \right)^n.$$

- а) Да се докаже, че редът е сходящ.  
 б) Да се докаже, че сумата на реда  $S$  е цяло число и 2014 дели  $S$ .

**Решение:** Нека  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 1)x^n$ . Редът е сходящ и  $f(x)$  е добре дефинирана при  $|x| < 1$ .

а) Директно следва от горните разсъждения.

б) За  $|x| < 1$  имаме  $(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ . След двукратно диференциране получаваме

$$(1-x)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n,$$

$$(1-x)^{-3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} \cdot x^n.$$

Оттук

$$f(x) = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{3}{(1-x)^2} + \frac{2}{1-x}.$$

Следователно

$$f\left(\frac{2013}{2014}\right) = 2014 \cdot (2 \cdot 2014^2 - 3 \cdot 2014 + 2),$$

откъдето непосредствено следва твърдението.

**Задача 3.** За  $p \geq 0$ , нека  $f_p(x) = 2014x - p \sin x$ . Да се намерят тези стойности на  $p$ , за които от  $f_p(f_p(x)) = x$  следва  $f_p(x) = x$ .

**Решение:** Отговор:  $0 \leq p \leq 2015$ .

Да отбележим, че  $f_p(x)$  и  $f_p(f_p(x))$  са нечетни функции.

Случай I:  $0 \leq p \leq 2013$ . Имаме  $f_p(x) > x$  за всяко  $x > 0$  (следва от известното  $|\sin x| < |x|$  за  $x \neq 0$ ), откъдето  $f_p(f_p(x)) > f_p(x) > x$ , т.е. от  $f_p(f_p(x)) = x$  следва  $x = 0$ .

Случай II:  $2013 < p \leq 2015$ . Имаме  $f_p(x) > -x$  за всяко  $x > 0$  (следва от известното  $|\sin x| < |x|$  за  $x \neq 0$ ). От друга страна, уравнението  $f_p(x) = x$  има единствено положително решение, да кажем  $x_0$ . Наистина, то е еквивалентно на  $\frac{\sin x}{x} = \frac{2013}{p}$ .

Функцията  $\frac{\sin x}{x}$  строго намалява в  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  от 1 до  $\frac{2}{\pi}$  (защото  $\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} < 0$ ) и строго намалява в  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  от  $\frac{2}{\pi}$  до 0 (защото е произведение на две положителни и строго намаляващи функции  $\sin x$  и  $\frac{1}{x}$ ). От  $\frac{2013}{p} < 1$ , следва, че

уравнението  $f_p(x) = x$  има единствено решение в  $(0, \pi)$ . Решения  $x > 2\pi$  уравнението няма, понеже  $\frac{\sin x}{x} < \frac{1}{2\pi} < \frac{2013}{p}$  (забележка: за големи  $p$  уравнението  $f_p(x) = x$  може да има повече от едно положително решение).

От  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_p(x) - x) = +\infty$  заключаваме, че  $f_p(x) > x$  за  $x > x_0$ . Имаме още  $f_p(0) = 0$  и  $(f_p(x) - x)' = 2013 - p \cos x < 0$  за  $0 \leq x < \arccos \frac{2013}{p}$ . Следователно,  $f_p(x) < x$  за  $0 < x < x_0$ .

Нека  $u > 0$ . Ако  $u > x_0$ , то  $f_p(u) > u > x_0$  и  $f_p(f_p(u)) > f_p(u) > u$ . Ако  $u < x_0$ , то  $-u < f_p(u) < u$ , т.е.  $|f_p(u)| < u$ . В случая  $0 \leq f_p(u)$  имаме  $f_p(f_p(u)) \leq f_p(u) < u$ , а в случая  $f_p(u) < 0$  имаме  $-f_p(f_p(u)) = f_p(-f_p(u)) > -(-f_p(u)) = f_p(u) > -u$ , т.е. отново  $f_p(f_p(u)) < u$ . Следователно,  $f_p(f_p(u)) = u$  за  $u > 0$  ни дава  $u = x_0$ .

Случай III:  $2015 < p$ . Тогава уравнението  $f_p(x) = -x$  има положително решение  $y_0$ . Имаме  $f_p(y_0) = -y_0 \neq y_0$  и  $f_p(f_p(y_0)) = f_p(-y_0) = -f_p(y_0) = -(-y_0) = y_0$ .

## Група Б

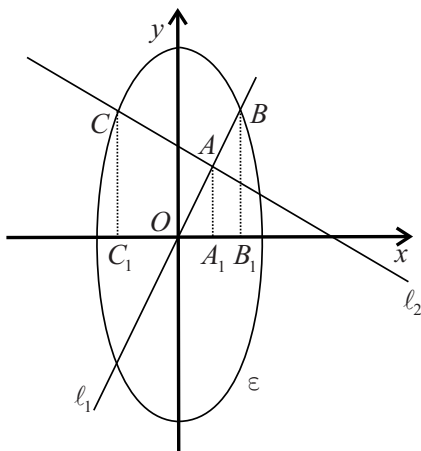
**Задача 1.** Дадени са правите  $\ell_1 : 2x - y = 0$ ,  $\ell_2 : 2x + 3y - 4 = 0$  и елипсата  $\mathcal{E} : 4x^2 + y^2 = 8$ .

а) Да се намерят координатите на точките  $A = \ell_1 \cap \ell_2$ ,  $B = \ell_1 \cap \mathcal{E}$  и  $C = \ell_2 \cap \mathcal{E}$ , където  $B$  е точка от първи квадрант и  $C$  е точка от втори квадрант.

б) Да се намери лицето на изпъкналата фигура, оградена от отсечките  $AB$ ,  $AC$  и дъгата  $\widehat{BC}$ .

**Решение:** Решаваме системата  $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2x + 3y - 4 = 0 \end{cases}$ , откъдето  $A\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ . От системата  $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 4x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$ , при дадените ограничения, намираме  $B(1, 2)$ . Аналогично от  $\begin{cases} 2x + 3y - 4 = 0 \\ 4x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$  получаваме  $C(-1, 2)$ .

б) Означаваме съответно с  $A_1, B_1, C_1$  проекциите на точките  $A, B$  и  $C$  върху абсцисната ос (фиг. 1).



Фигура 1.

Търсеното лице ще намерим като разлика между лицето на фигурата  $C_1B_1BC$  и лицата на трапеците  $C_1A_1AC$  и  $A_1B_1BA$ .

$$S_{C_1A_1AC} = \frac{9}{4}, \quad S_{A_1B_1BA} = \frac{3}{4},$$

$$S_{C_1B_1BC} = \int_{-1}^1 \sqrt{8-4x^2} dx = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{2-x^2} dx = 2 + \pi.$$

Тогава търсеното лице е равно на  $2 + \pi - \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \pi - 1$ .

**Задача 2.** Нека

$$\mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

а) Да се пресметне  $\det \mathbf{A}_3$ .

б) Да се намери  $\det \mathbf{A}_n$ .

в) Да се намери  $\mathbf{A}_n^{-1}$ .

**Решение:** а) Пресмятаме

$$|\mathbf{A}_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

б) В подусловие а) сме намерили  $|\mathbf{A}_3| = 1$ . С индукция по  $n$  ще докажем, че  $|\mathbf{A}_n| = 1$  за всяко  $n \geq 2$ . Чрез развиване на  $|\mathbf{A}_{n+1}|$  по последния ред получаваме рекурентната връзка

$$|\mathbf{A}_{n+1}| = 2|\mathbf{A}_n| - |\mathbf{A}_{n-1}|, \quad n \geq 3.$$

Нека за някое  $n \geq 3$  сме доказали, че  $|\mathbf{A}_{n-1}| = |\mathbf{A}_n| = 1$ , тогава от рекурентната връзка намираме  $|\mathbf{A}_{n+1}| = 2|\mathbf{A}_n| - |\mathbf{A}_{n-1}| = 2 - 1 = 1$ , с което индукционната стъпка е направена, и доказателството завършено.

в) Непосредствено се проверява, че  $\mathbf{A}_n = \mathbf{B}_n^\top \mathbf{B}_n$ , където

$$\mathbf{B}_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и  $\mathbf{B}_n^\top$  е транспонираната матрица на  $\mathbf{B}_n$  (оттук също следва, че  $|\mathbf{A}_n| = 1$ ). Тогава  $\mathbf{A}_n^{-1} = \mathbf{B}_n^{-1}(\mathbf{B}_n^{-1})^\top = \mathbf{C}_n \mathbf{C}_n^\top$ . Лесно се съобразява (например чрез прилагане на метода на Гаус-Жордан), че

$$\mathbf{C}_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Елементите  $d_{i,j}$  на матрицата  $\mathbf{D}_n = \mathbf{A}_n^{-1}$  се получават като скалярно произведение на векторите  $\mathbf{c}_i$  и  $\mathbf{c}_j$ , където

$$\mathbf{c}_k = (0, \dots, 0, 1, 1, \dots, 1)$$



и последователността от единици започва от  $k$ -та позиция. Следователно  $d_{i,j}$  е равно на броя на събираемите-единици в това скалярно произведение, т. е.

$$d_{i,j} = \min\{n+1-i, n+1-j\} = n+1 - \max\{i, j\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

**Задача 3.** Да се пресметне интегралът

$$\int \frac{x \, dx}{(3 \sin x + 4 \cos x)^2}.$$

**Решение:** Преобразуваме

$$\begin{aligned} \int \frac{x \, dx}{(3 \sin x + 4 \cos x)^2} &= \int \frac{x \, dx}{\cos^2 x (3 \operatorname{tg} x + 4)^2} \\ &= \int \frac{x \, d \operatorname{tg} x}{(3 \operatorname{tg} x + 4)^2} = -\frac{1}{3} \int x \, d \frac{1}{3 \operatorname{tg} x + 4} \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{x}{3 \operatorname{tg} x + 4} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{3 \operatorname{tg} x + 4}. \end{aligned}$$

В  $J = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{3 \operatorname{tg} x + 4}$  полагаме  $\operatorname{tg} x = t$  и получаваме

$$J = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{(1+t^2)(3t+4)}.$$

От разлагането  $\frac{1}{(1+t^2)(3t+4)} = \frac{1}{25} \left( \frac{-3t+4}{1+t^2} + \frac{9}{3t+4} \right)$  намираме

$$\begin{aligned} J &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{25} \ln(1+t^2) + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{25} \operatorname{arctg} t + \frac{1}{25} \ln|3t+4| + C \\ &= \frac{4x}{75} + \frac{\ln|3 \sin x + 4 \cos x|}{25} + C. \end{aligned}$$

Следователно

$$\int \frac{x \, dx}{(3 \sin x + 4 \cos x)^2} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{x}{3 \operatorname{tg} x + 4} + \frac{4x}{75} + \frac{\ln|3 \sin x + 4 \cos x|}{25} + C.$$

## Група В

**Задача 1.** Нека  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  са квадратни матрици от ред  $n$ , и е изпълнено  $\mathbf{A}(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = \mathbf{0}$  и  $\mathbf{B}(\mathbf{B} - \mathbf{E}) = \mathbf{0}$ , където  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{0}$  са съответно единичната и нулевата матрици от ред  $n$ . Да се реши матричното уравнение

$$2\mathbf{X} - \mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B} = \mathbf{C}.$$

**Решение:** Умножаваме двете страни на даденото уравнение отляво с  $\mathbf{A}$  и отдясно с  $\mathbf{B}$ , и получаваме

$$2\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B} - \mathbf{A}^2\mathbf{X}\mathbf{B}^2 = \mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{B}.$$

Тъй като по условие  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}^2 = \mathbf{B}$ , последното уравнение е еквивалентно на уравнението

$$2\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B} - \mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{B},$$

или  $\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{B}$ . Замествайки в даденото уравнение, получаваме  $2\mathbf{X} - \mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{B} = \mathbf{C}$ , откъдето намираме

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{B} + \mathbf{C}).$$

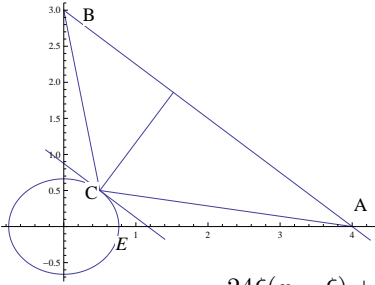
**Задача 2.** В равнината спрямо декартова координатна система са дадени точките  $A(4, 0)$  и  $B(0, 3)$  и елипсата  $\mathcal{E} : 12x^2 + 16y^2 = 7$ .

а) Да се намерят координатите на точката  $C \in \mathcal{E}$ , за която лицето на  $\triangle ABC$  е най-малкото възможно.

б) Да се пресметне  $S_{\triangle ABC}$ .

**Решение:** Точката  $C \in \mathcal{E}$  трябва да е възможно най-близката точка от елипсата до правата  $AB$ , и очевидно трябва да лежи в първи квадрант. Правата  $AB$  има нормално уравнение

$$f(x, y) := \frac{3x}{5} + \frac{4y}{5} - \frac{12}{5} = 0.$$



$C(\xi, \eta) \in \mathcal{E}$  е търсената точка, ако допирателната към  $\mathcal{E}$  през нея е успоредна на  $AB$ , т.е. има нормален вектор  $\vec{n}(3, 4)$ . Уравнението на тази допирателна е

$$24\xi(x - \xi) + 32\eta(y - \eta) = 0,$$

следователно трябва да е изпълнено  $32\eta : 24\xi = 4 : 3$ , или  $\xi = \eta$ . От условието  $C \in \mathcal{E}$  получаваме  $12\xi^2 + 16\xi^2 = 7$ , т.е.  $\xi^2 = 1/4$ , и понеже  $C$  е в първи квадрант, намираме  $\xi = \eta = \frac{1}{2}$ , т.е. търсената точка е  $C(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Разстоянието от  $C$  до  $AB$  (дължината  $h$  на височината на  $\triangle ABC$  през  $C$ ) е равно на  $|f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})| = \frac{17}{10}$ , а  $AB = 5$ , следователно

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot h = \frac{17}{4}.$$

**Задача 3.** Дадена е функцията

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Нека  $x_0 = 1$ , а членовете на редицата  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  се получават рекурсивно по следния начин: ако сме намерили  $x_n$  и  $\ell_n$  е допирателната към графиката на функцията  $y = f(x)$  в точката  $(x_n, f(x_n))$ , тогава пресечната точка на  $\ell_n$  с абсцисната ос има координати  $(x_{n+1}, 0)$ .

- Да се намери  $x_1$ .
- Да се изрази  $x_{n+1}$  чрез  $x_n$ .
- Да се докаже, че за всяко  $n$  е изпълнено

$$\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} < 3.$$

**Решение:** Производната на  $f(x)$  е  $f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ , а допирателната  $\ell$  към  $y = f(x)$  в точка с координати  $(\xi, f(\xi))$  има уравнение

$$\ell : y - \frac{1}{1 + \xi^2} = -\frac{2\xi}{(1 + \xi^2)^2} (x - \xi).$$

При  $\xi = x_0 = 1$  уравнението на допирателната  $\ell_0$  е  $y - 1/2 = -\frac{1}{2}(x - 1)$ , и тя пресича абсцисната ос при  $x = x_1 = 2$ .

Изобщо, уравнението на допирателната  $\ell_n$  към  $y = f(x)$  в точката  $(x_n, f(x_n))$  е

$$\ell_n : y - \frac{1}{1 + x_n^2} = -\frac{2x_n}{(1 + x_n^2)^2} (x - x_n),$$

и  $(x_{n+1}, 0)$  е решение на това уравнение. От тук извеждаме търсената връзка:

$$x_{n+1} = \frac{3}{2}x_n + \frac{1}{2x_n}.$$

Вижда се, че членовете на редицата са положителни числа, и  $x_{n+1} > \frac{3}{2}x_n$ , следователно

$$\frac{1}{x_{n+1}} < \frac{2}{3} \frac{1}{x_n} \quad \text{за всяко } n \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{x_n} < \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{за всяко } n \in \mathbb{N}.$$

От тук

$$\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} < 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3.$$

## ОРГАНИЗАЦИОНЕН КОМИТЕТ

проф. д-р Марин Христов, ректор на ТУ – София – председател

доц. д-р Иван Кралов, зам. ректор НПД, ТУ – София

проф. д-р Никола Калоянов, ЕМФ, ТУ – София

доц. д-р Георги Венков, декан ФПМИ ТУ – София

Панайот Рейзи, кмет на Община Созопол

Димитрина Щерионова, директор на СОУ „Св. св. Кирил и Методий“

Румяна Йорданова – секретар