НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

Монтана, 12-14 май 2023 г.

Група В

Всяка задача се оценява с максимум 10 точки

Задача 1. Нека $\mathbf{A}$ е квадратна матрица от ред три, шест от елементите на която са равни на единица, а останалите са нули.

а) Да се посочи максималната възможна стойност на детерминантата на матрицата $\mathbf{A}$, като отговорът се обоснове;

б) Да се даде пример на матрица $\mathbf{A}$, за която тази максимална стойност се достига.

Решение. Тъй като размяна на местата на два реда/стълба на $\mathbf{A}$ променя само знака на детерминантата ѝ, задачите за максимална и минимална стойност на $\det(\mathbf{A})$ са еквивалентни. За да имаме ненулева детерминанта се ограничаваме с разглеждане на матриците $\mathbf{A}$, в които всеки ред и всеки стълб съдържа поне една единица. Използваме следното очевидно наблюдение: ако $\mathbf{B}$ е матрица от ред 2 с елементи от множеството $\{0,1\}$, тогава $-1 \le \det(\mathbf{B}) \le 1$.

Налице са две възможности:

1). $\mathbf{A}$ съдържа ред съставен само от единици. Тогава единият от редовете на матрицата $\mathbf{A}'$ съставена от останалите два реда на $\mathbf{A}$ съдържа само една единица, и от развиването на $\det(\mathbf{A})$ по него и горното наблюдение следва $-1 \le \det(\mathbf{A}) \le 1$.

2). Всеки ред на $\mathbf{A}$ съдържа точно две единици. Тогава, развивайки $\det(\mathbf{A})$ по кой да е от редовете ѝ, получаваме, че $\det(\mathbf{A})$ е сума или разлика на две детерминанти с елементи от $\{0,1\}$, и предвид наблюдението, заключаваме, че $-2 \le \det(\mathbf{A}) \le 2$. Пример за матрица с детерминанта 2 е

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Дадена е окръжност с уравнение $x^2 + y^2 = 1$. През точката $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ са построени допирателните към окръжността. Да се намерят уравненията на тези допирателни и да се намери ъгълът между тях.

Решение. Снопът прави през точката A има уравнения $y = k(x - \sqrt{2}) + \sqrt{2}$, където ъгловият коефициент на правата k е реално число. За да има допиране на права от снопа и окръжността, системата $\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ y = k(x - \sqrt{2}) + \sqrt{2} \end{array} \right.$ трябва да има единствено решение. Следователно квадратното уравнение $x^2 + \big(k(x - \sqrt{2}) + \sqrt{2}\big)^2 = 1$ или $(1+k^2)x^2 + 2\sqrt{2}k(1-k)x + 2k^2 - 4k + 1 = 0$ трябва да има нулева дискриминанта D. От тук получаваме уравнението

$$D = \big(2\sqrt{2}k(1-k)\big)^2 - 4(1+k^2)(2k^2 - 4k + 1) = -4(k^2 - 4k + 1) = 0$$

с решения $k_1 = 2 + \sqrt{3}$, $k_2 = 2 - \sqrt{3}$. Следователно декартовите уравнения на двете допирателни са $y = (2+\sqrt{3})(x - \sqrt{2}) + \sqrt{2}$ и $y = (2-\sqrt{3})(x - \sqrt{2}) + \sqrt{2}$. Тангенсът на ъгъла между тях намираме по формулата $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{1+1} = \sqrt{3}$, откъдето получаваме $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

Задача 3.

а) Да се докаже, че за всяко $x \geq 0$ е изпълнено неравенството $\sin x \leq x$;

б) Да се докаже, че за всяко $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ е изпълнено неравенството $\sin x \geq \dfrac{2}{\pi}\, x$.

Решение. Разглеждаме функцията $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ при $0 < x < \pi/2$. Производната ѝ е $f'(x) = \dfrac{\cos x}{x^2}\big(x - \operatorname{tg} x\big)$. За $g(x) = x - \operatorname{tg} x$ имаме $g'(x) = -\operatorname{tg}^2 x$, $0 < x < \pi/2$. Следователно $g(x)$ е намаляваща в интервала $(0, \pi/2)$ и затова $g(x) \leq g(0) = 0$ в този интервал. От тук следва, че $f'(x) \leq 0$ в интервала $(0, \pi/2)$, и следователно $f(x)$ е намаляваща в този интервал. Тъй като $f(x)$ е непрекъсната функция в $[0, \pi/2]$ (като $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = 1$), имаме

$$f\Big(\frac{\pi}{2}\Big) \leq f(x) \leq f(0)\,, \quad \text{т.е.} \quad \frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1 \quad \text{за всяко} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \tag{1}$$

Лявото неравенство в (1) доказва неравенството в подточка б). Неравенството в а) следва от второто неравенство в (1) и (при $x > \pi/2$) от $f(x) \leq |f(x)| \leq \dfrac{1}{x} < \dfrac{2}{\pi} < 1$.

Задача 4. Дадена е функцията $f(x) = \ln(8x^2 + 6) - x^2$.

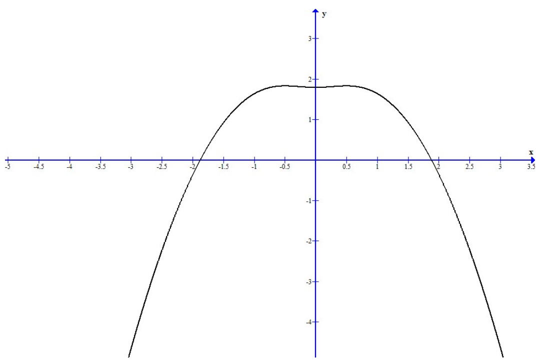
а) Да се се намерят локалните екстремуми на $f(x)$;

б) Да се скицира графиката на $y = f(x)$;

в) В зависимост от стойностите на реалния параметър a да се намери броят на корените на уравнението $f(x) + a = 0$.

Решение. а) Дефиниционната област на f е $(-\infty, \infty)$. Производната ѝ $f'(x) = \dfrac{2x(1 - 4x^2)}{4x^2 + 3)}$ е положителна в $\Big(-\infty, -\dfrac{1}{2}\Big) \cup \Big(0, \dfrac{1}{2}\Big)$ и отрицателна в $\Big(-\dfrac{1}{2}, 0\Big) \cup \Big(\dfrac{1}{2}, +\infty\Big)$. Следователно f има локални максимуми в $x = -\dfrac{1}{2}$ и $x = \dfrac{1}{2}$, като $f_{\max} = f\Big(\pm\dfrac{1}{2}\Big) = \ln 8 - \dfrac{1}{4}$, и локален минимум в $x = 0$, $f_{\min} = f(0) = \ln 6$.

б)



в) Трябва да се определи броят на пресечните точки на графиките на $f(x)$ и $g(x) = -a$:

1. За $a \in \Big(-\infty, \dfrac{1}{4} - \ln 8\Big)$ уравнението няма решение ;

2. За $a \in \Big(-\ln 6, +\infty\Big)$ или $a = \dfrac{1}{4} - \ln 8$ уравнението има две решения ;

3. За $a = -\ln 6$ уравнението има три решения ;

4. За $a \in \Big(\dfrac{1}{4} - \ln 8, -\ln 6\Big)$ уравнението има четири решения.