НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

Монтана, 12-14 май 2023 г.

Група Б

Задача 1. Дадена е матрицата $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

а) Да се докаже, че $\mathbf{A}^3 = 13\mathbf{A}^2 - 56\mathbf{A} + 80\mathbf{E}$, където $\mathbf{E}$ единичната матрица от трети ред.

б) Да се пресметне $\mathbf{A}^n$.

в) Да се намери сумата от елементите на матрицата $\mathbf{A}^{2023}$.

Решение.

а) Характеристичното уравнение на матрицата $\mathbf{A}$ е

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0, .$$

откъдето $\lambda^3 - 13\lambda^2 + 56\lambda - 80 = 0$.

От теоремата на Хамилтон-Кейли следва, че $\mathbf{A}^3 - 13\mathbf{A}^2 + 56\mathbf{A} - 80\mathbf{E} = \mathbf{O}$, където $\mathbf{O}$ е нулевата матрица.

Забележка. Доказателството може да бъде направено чрез непосредствени пресмятания.

б) Пресмятаме

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 5^2 & 5^2-4^2 & 5^2-4^2 \\ 0 & 4^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} 5^3 & 5^3-4^3 & 5^3-4^3 \\ 0 & 4^3 & 0 \\ 0 & 0 & 4^3 \end{pmatrix}.$$

По индукция се доказва, че

$$\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} 5^n & 5^n-4^n & 5^n-4^n \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}.$$

в) От б) следва, че сумата на елементите на $\mathbf{A}^{2023}$ е равна на 3.5^{2023}.

Задача 2. Дадени са елипсата $\varepsilon : \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ и точката $M(3,2)$.

а) Да се докаже, че точката M е вътрешна за областта, заградена от ε.

б) Да се намери уравнението на права g, която минава през M и пресича ε в точки A и B, които са симетрични спрямо M.

в) Да се намери лицето на триъгълника, образуван от координатните оси и правата l, минаваща през M и перпендикулярна на g.

Решение.

а)Тъй като $\dfrac{3^2}{25}+\dfrac{2^2}{9}<1$, точката M лежи в областта, заградена от ε.

б) Нека ъгловият коефициент на правата g е k. Тогава нейното уравнение е

$$g: y = k(x-3)+2.$$

Заместваме y от последното равенство в уравнението на ε и получаваме

$$(25k^2+9)x^2 - 50k(3k-2)x + 25(9k^2-12k-5) = 0.$$

От формулата на Виет сумата на корените на това уравнение е

$$x_1+x_2 = \frac{50k(3k-2)}{25k^2+9}.$$

От друга страна абсцисата на точка M е равна на $\dfrac{x_1+x_2}{2}$. Следователно $\dfrac{25k(3k-2)}{25k^2+9}=3$. Оттук $k=-\dfrac{27}{50}$ и

$$g: 27x+50y-181=0.$$

в) Правата l има ъглов коефициент $k_1=-\dfrac{1}{k}=\dfrac{50}{27}$. Следователно нейното уравнение е $l: y=\dfrac{50}{27}(x-3)+2$, т.е. $l: 50x-27y-96=0$.

Пресечните точки на правата l съответно с Ox и Oy са $P\left(\dfrac{48}{25},0\right)$ и $Q\left(0,-\dfrac{32}{9}\right)$. Оттук за търсеното лице получаваме $\dfrac{256}{75}$.

Задача 3. Да се намери дължината на кривата $y=\dfrac{\ln x - x^2}{2}$, $\quad x\in\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right]$.

Решение. Прилагайки формулата за дължина на дъга, получаваме

$$l = \int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \sqrt{1+y'^2}dx = \int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1+4x^4}}{2x}dx.$$

В неопределения интеграл полагаме $4x^4+1=u^2$ и получаваме

$$\int \frac{\sqrt{1+4x^4}}{2x}dx = \frac{1}{4}\int \frac{u^2}{u^2-1}\,du = \frac{1}{4}u+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C.$$

Тогава за дължината на кривата имаме

$$\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1+4x^4}}{2x}dx = \left(\frac{1}{4}\sqrt{1+4x^4}+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{1+4x^4}-1}{\sqrt{1+4x^4}+1}\right|\right)\Bigg|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}-\ln 4+\ln(\sqrt{5}-1)(\sqrt{2}+1)\right).$$

Задача 4. Дадена е редицата с общ член

$$a_k = \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{1}{e^k} - \left(\frac{x}{x+k}\right)^x\right).$$

Да се намери $\lim\limits_{k\to\infty} a_k$.

Решение. Тъй като $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+k}\right)^x = \dfrac{1}{e^k}$, имаме

$$a_k = \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{1}{e^k} - \left(\frac{x}{x+k}\right)^x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{e^k} - \left(\frac{x}{x+k}\right)^x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} x^2\left[\left(\frac{x}{x+k}\right)^x\right]'$$
$$= \frac{1}{e^k}\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{x}{x+k} + \frac{k}{x+k}}{\frac{1}{x^2}} = -\frac{k^2}{e^k}\,.$$

Следователно

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty}\left\{-\frac{k^2}{e^k}\right\} = 0\,.$$

Всяка задача се оценява с максимум 10 точки

Време за работа: 5 часа