

# НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

Монтана, 12-14 май 2023 г.

## Група Б

**Задача 1.** Дадена е матрицата  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ .

- а) Да се докаже, че  $\mathbf{A}^3 = 13\mathbf{A}^2 - 56\mathbf{A} + 80\mathbf{E}$ , където  $\mathbf{E}$  единичната матрица от трети ред.
- б) Да се пресметне  $\mathbf{A}^n$ .
- в) Да се намери сумата от елементите на матрицата  $\mathbf{A}^{2023}$ .

**Задача 2.** Дадени са елипсата  $\varepsilon : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  и точката  $M(3, 2)$ .

- а) Да се докаже, че точката  $M$  е вътрешна за областта, заградена от  $\varepsilon$ .
- б) Да се намери уравнението на права  $g$ , която минава през  $M$  и пресича  $\varepsilon$  в точки  $A$  и  $B$ , които са симетрични спрямо  $M$ .
- в) Да се намери лицето на триъгълника, образуван от координатните оси и правата  $l$ , минаваща през  $M$  и перпендикулярна на  $g$ .

**Задача 3.** Да се намери дължината на кривата  $y = \frac{\ln x - x^2}{2}$ ,  $x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$ .

**Задача 4.** Дадена е редицата с общ член

$$a_k = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \frac{1}{e^k} - \left( \frac{x}{x+k} \right)^x \right).$$

Да се намери  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k$ .

Всяка задача се оценява с максимум 10 точки

Време за работа: 5 часа