НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

Монтана, 12-14 май 2023 г.

Група А

Всяка задача се оценява с максимум 10 точки

Задача 1. Да се пресметне интегралът

$$\int_0^1 \left(2x^5 - 5x^4 + 4x^3 - x^2\right)^{2023} dx\,.$$

Решение. От $2x^5 - 5x^4 + 4x^3 - x^2 = x^2(x-1)^2(2x-1)$ получаваме

$$\int_0^1 \left(2x^5 - 5x^4 + 4x^3 - x^2\right)^{2023} dx = 2^{2023} \int_0^1 x^{4046}(1-x)^{4046}\Big(x - \frac{1}{2}\Big)^{2023} dx = 0,$$

тъй като подинтегралната функция f е нечетна относно средата на интервала върху който интегрираме, т.е. $f(1-x) = -f(x)$.

Задача 2. Нека $f(x) = x^{2024} + x^{2022} - \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ и $\mathbf{A}$ е квадратна матрица от ред 2023 с реални елементи, удовлетворяваща условията: $f(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ и $\operatorname{rank}(\mathbf{A} - t\,\mathbf{E}) = 2022$ за всеки реален корен t на $f(x)$ (с $\mathbf{E}$ и $\mathbf{0}$ са означени единичната и нулевата матрици от ред 2023).

а) Да се докаже, че $\alpha = 0$;

б) Да се намери пример на матрица $\mathbf{A}$, изпълняваща условието на задачата при $\alpha = 0$.

Решение. Да допуснем, че $\alpha \neq 0$. Ако f има кратни корени, то те трябва да са корени на производната $f'(x) = (2024x^2 + 2022)x^{2021}$. Понеже 0 не е корен на f, остават възможностите корени на f да са корените на $2024x^2 + 2022$, които не са реални числа. Това означава, че реалните корени на f (ако има такива) са прости корени (еднократни). Понеже матрицата $\mathbf{A}$ нулира f, то минималният полином на $\mathbf{A}$ дели f. Следователно реалните корени на минималния полином на $\mathbf{A}$ (ако има такива) са прости корени. Известно е, че ако един корен на минималния полином на дадена матрица е прост корен на този полином, то в Жордановата форма на матрицата, клетките съответстващи на този корен са тривиални (с размерност 1), т.е. геометричната и алгебричната кратност на този корен съвпадат. Това означава, че геометричната и алгебричната кратност на всеки реален корен на характеристичния полином на $\mathbf{A}$ съвпадат. Но характеристичните корени на $\mathbf{A}$ са корени и на f. Щом $\operatorname{rank}(\mathbf{A} - t\,\mathbf{E}) = 2022$ за всяко t, което е реален корен на f, то $\operatorname{rank}(\mathbf{A} - s\,\mathbf{E}) = 2022$ за всяко s, което е реален характеристичен корен на $\mathbf{A}$, т.е. геометричната кратност на всеки реален характеристичен корен на $\mathbf{A}$ е 1. Следователно алгебричната кратност на реалните характеристични корени на $\mathbf{A}$ (ако има такива) е 1, т.е. те са прости корени на характеристичния полином на $\mathbf{A}$.

От друга страна $\mathbf{A}$ е от ред 2023, следователно тя има реални характеристични корени. Те са корени и на f, но $f'(x) = x^{2021}(2024x^2 + 2022)$ има единствен реален корен 0. Оттук следва, че f има най-много два реални корена. За да има точно един корен е необходимо $\alpha = 0$. Следователно f има точно два различни реални корена. Понеже $\mathrm{rank}\mathbf{A} - t\,\mathbf{E}) < 2023$, за всяко t, което е реален корен на f, то реалните корени на f съвпадат с реалните характеристични корени на $\mathbf{A}$. Значи $\mathbf{A}$ има точно два различни реални характеристични корена и съгласно съображенията по-горе, получаваме, че те са прости. Но това е невъзможно за полином от нечетна степен. От тук заключаваме, че $\alpha = 0$.

б) Матрица съставена от 1011 клетки от вида $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и 0 най-отдолу по диагонала.

Задача 3. Елементите a_{ij} на квадратната матрица $\mathbf{A}$ от ред 2023 са от множеството $\{-1, 1\}$, и матрицата $\mathbf{B} = 2023\,\mathbf{E} - \mathbf{A}$ е необратима (с $\mathbf{E}$ е означена единичната матрица от ред 2023).

а) Да се докаже, че $a_{kk} = 1$ за $1 \leq k \leq 2023$;
б) Да се докаже, че матрицата $\mathbf{A}$ е симетрична.

Решение. От $\det \mathbf{B} = 0$ следва, че системата $\mathbf{B}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ притежава ненулево решение $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$. Нека $|x_k| = \max\limits_{1 \leq i \leq 2023} |x_i| > 0$. От k-тото уравнение на системата $\mathbf{B}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ получаваме

$$(2023 - a_{kk})x_{kk} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{2023} a_{kj}x_j\,,$$

откъдето

$$(2023 - a_{kk})|x_k| = \Big|\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{2023} a_{kj}x_j\Big| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{2023} |a_{kj}|\,|x_j| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{2023} |x_j| \leq 2022\,|x_k|, \tag{1}$$

следователно $2023 - a_{kk} \leq 2022$ и от тук $a_{kk} = 1$. За да изключим абсурдното неравенство $2022 < 2022$, трябва навсякъде в неравенствата от (1) да имаме равенства. Това е така само когато са изпълнени следните две условия:

(i) $|x_j| = |x_k|$ за всяко $j \neq k$;

(ii) $\mathrm{sign}\, a_{kj}\,.\mathrm{sign}\, x_j$ е един и същ за всяко $j \neq k$.

Предвид (i), можем да повторим горните разсъждения за всяко от уравненията от системата $\mathbf{B}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$. В частност, от тях заключаваме, че $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{2023,2023} = 1$.
От (ii) получаваме, че за всеки два индекса $i \neq j$ имаме

$$a_{kj} = a_{jk} = \mathrm{sign}\,\frac{x_k}{x_j}\,,$$

следователно $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$.

Задача 4. Редицата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е зададена с $a_0 = 1$ и $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Да се намери

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_n - \sqrt{2n}\right).$$

Решение. От рекурентната връзка следва, че $a_{n+1}^2 = a_n^2 + \dfrac{1}{a_n^2} + 2$. От тук с индукция показваме, че $a_n > \sqrt{2n}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Неравенството е очевидно при $n = 1$ $(a_1 = 2 > \sqrt{2})$, и ако е вярно за някое $n \in \mathbb{N}$, използвайки, че функцията $x + \dfrac{1}{x}$ е монотонно растяща при $x \geq 1$, извършваме индукционната стъпка с $a_{n+1}^2 \geq 2n + \dfrac{1}{2n} + 2 > 2n + 2$. Очевидно редицата $\{a_n\}$ е монотонно растяща, такава е и редицата $\{a_n + \sqrt{2n}\}$. Прилагаме теоремата на Щолц:

$$
\begin{aligned}
0 \leq \lim_{n\to\infty} \left(a_n - \sqrt{2n}\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2 - 2n}{a_n + \sqrt{2n}} \underset{\text{Щолц}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\left(a_{n+1}^2 - 2(n+1)\right) - \left(a_n^2 - 2n\right)}{\left(a_{n+1} + \sqrt{2(n+1)}\right) - \left(a_n + \sqrt{2n}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}^2 - a_n^2 - 2}{a_{n+1} - a_n + \sqrt{2(n+1)} - \sqrt{2n}} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}^2 - a_n^2 - 2}{a_{n+1} - a_n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0\,.
\end{aligned}
$$

Получихме, че $\lim\limits_{n\to\infty} \left(a_n - \sqrt{2n}\right) = 0\,.$