НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

гр. Варна, 14-16 май 2021 г.

Група Б

Задача 1. Дадена е матрицата $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a^k & -a & 1 \end{pmatrix}$, където $a>0$ и $k>0$. Нека n е естествено число:

а) (6 точки) да се намери A^n;

б) (4 точки) за кои стойности на n сумата от елементите на A^n приема най-голяма стойност при $a=2$ и $k=2021$.

Решение: а) Последователно пресмятаме

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 1 & 0 \\ 2a^k-a^2 & -2a & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3a & 1 & 0 \\ 3a^k-3a^2 & -3a & 1 \end{pmatrix}, \quad A^4=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4a & 1 & 0 \\ 4a^k-6a^2 & -4a & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^5=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5a & 1 & 0 \\ 5a^k-10a^2 & -5a & 1 \end{pmatrix}.$$

На основание на тези наблюдения стигаме до извода, че

$$A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ na & 1 & 0 \\ na^k-\dfrac{n(n-1)}{2}a^2 & -na & 1 \end{pmatrix}.$$

Този резултат може да бъде доказан по индукция.

б) При $a=2$ и $k=2021$ за $f(n)$ получаваме $f(n)=-2n^2+2\left(1+2^{2020}\right).n+3$. Максимумът на тази функция се получава при $n_0=\dfrac{-2\left(1+2^{2020}\right)}{2.(-2)}=\dfrac{1+2^{2020}}{2}=2^{2019}+\dfrac{1}{2}$.

Тъй като получената стойност за n не е цяло число, то най-голямата стойност на $f(n)$ се получава при $n_1=n_0-\dfrac{1}{2}=2^{2019}$ и $n_1=n_0+\dfrac{1}{2}=2^{2019}+1$.

Забележка. Задачата има смисъл и при $n\le 0$.

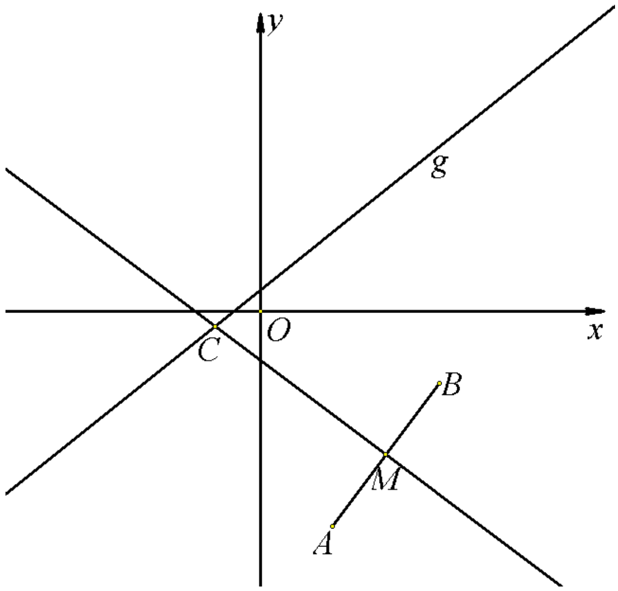
Задача 2. В равнината Oxy са дадени права $g:4x-5y+3=0$ и точки $A(2,-6)$ и $B(5,-2)$. Да се намерят:

а) (2 точки) точка C върху правата g така, че ΔABC е равнобедрен;

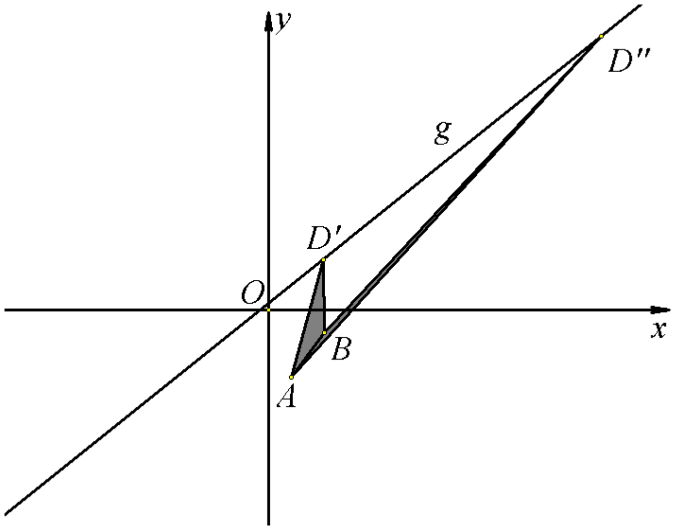
б) (3 точки) точка D върху правата g така, че ΔABD има лице 10;

в) (5 точки) точка P върху правата g така, че ΔABP има минимален периметър.

Решение: а) Точката C лежи върху симетралата s на отсечката AB. От условията, че правата s минава през средата $M\left(\frac{7}{2},-4\right)$ на отсечката AB и е перпендикулярна на вектора $\overrightarrow{AB}(3,4)$ получаваме, че тя има следното уравнение $s: 6x+8y+11=0$. Координатите на търсената точка C са решение на ситемата $\left|\begin{array}{l}4x-5y+3=0,\\ 6x+8y+11=0,\end{array}\right.$ получена от уравненията на правите g и s. Оттук получаваме $C\left(-\frac{79}{62},-\frac{13}{31}\right)$.



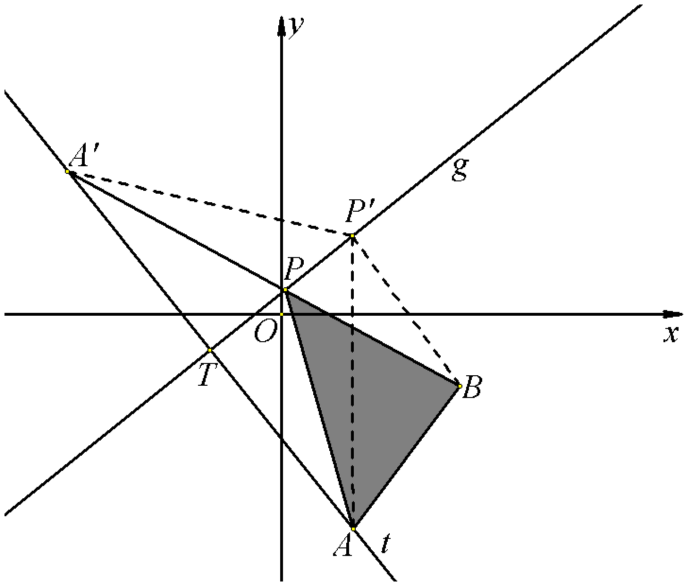
б) Нека координатите на D са (x_D, y_D). Лицето на ΔABC се пресмята по формулата $S_{ABD}=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_D & y_D & 1\end{vmatrix}\right|$. Оттук получаваме равенството $10=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 2 & -6 & 1\\ 5 & -1 & 1\\ x_D & y_D & 1\end{vmatrix}\right|$, което е еквивалентно с $-4x_D+3y_D+26\pm 20=0$. Тъй като $D\in g$, то е изпълнено равенството $4x_D-5y_D+3=0$. Системата от последните две уравнения води до двете решения $D'\left(\frac{39}{8},\frac{9}{2}\right)$ и $D''\left(\frac{239}{8},\frac{49}{2}\right)$ на задачата.



в) Нека A' е точката, симетрична на A спрямо g. Нека P е пресечната точка на $A'B$ и g, а P' е произволна точка от g. Ако периметрите на ΔABP и $\Delta ABP'$ са съответно p и p', то

$p' = AB + AP' + BP' = AB + A'P' + BP' \geq AB + A'B = AB + A'P + PB = AB + AP + PB = p$.

Равенството $p' = p$ е изпълнено тогава и само тогава, когато $P' \equiv P$. Следователно търсената точка е $P = g \cap A'B$.



Нека правата t минава през точката $A(2,-6)$ и е перпендикулярна на правата g (това означава, че $t \perp \vec{n}(5,4)$). За уравнението на t получаваме $t: 5x + 4y + 14 = 0$. От уравненията на g и t образуваме системата $\begin{vmatrix} 4x - 5y + 3 = 0, \\ 5x + 4y + 14 = 0 \end{vmatrix}$ и получаваме, че пресечната им точка е $T(-2,-1)$. От координатите на A и T получаваме $A'(-6,4)$. От координатите на точките B и A' за уравнението на правата $A'B$ намираме $A'B: 6x + 11y - 8 = 0$. От системата $\begin{vmatrix} 4x - 5y + 3 = 0, \\ 6x + 11y - 8 = 0, \end{vmatrix}$ получена от уравненията на правите g и $A'B$ намираме, че координатите на търсената точка P са следните $P\left(\dfrac{7}{74}, \dfrac{25}{37}\right)$.

Задача 3. Да се докажат неравенствата:

а) (5 точки) $\operatorname{tg} x \geq x$ при $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$;

б) (5 точки) $\ln\left(\frac{2\cos x}{\sqrt{3}}\right) \leq \frac{\pi^2}{72} - \frac{x^2}{2}$ при $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение: а) Разглеждаме функцията $f(x) = tgx - x$ при $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. За производната на тази функция имаме $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = tg^2 x > 0$. Следователно $f(x)$ е растяща и $f(x) \geq f(0) = 0$, т.е. $tgx \geq x$.

б) Нека $f_1(u) = tgu$ и $f_2(u) = u$. Тъй като от неравенството $f_1(u) \geq f_2(u)$ при $\frac{\pi}{6} \leq u \leq x < \frac{\pi}{2}$, то $\int_{\frac{\pi}{6}}^{x} f_1(u)\,du \geq \int_{\frac{\pi}{6}}^{x} f_2(u)\,du$. Оттук получаваме последователно

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{x} tgudu \geq \int_{\frac{\pi}{6}}^{x} udu,\ \int_{\frac{\pi}{6}}^{x} \frac{\sin u}{\cos u}du \geq \left.\frac{u^2}{2}\right|_{\frac{\pi}{6}}^{x},\ -\int_{\frac{\pi}{6}}^{x} \frac{d\cos u}{\cos u} \geq \frac{x^2}{2} - \frac{\pi^2}{72},\ \left.\ln(\cos u)\right|_{\frac{\pi}{6}}^{x} \leq \frac{x^2}{2} - \frac{\pi^2}{72},$$

$$\ln(\cos x) - \ln\left(\cos\frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{x^2}{2} - \frac{\pi^2}{72},\ \ln(\cos x) - \ln\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{x^2}{2} - \frac{\pi^2}{72},\ \ln\left(\frac{2\cos x}{\sqrt{3}}\right) \leq \frac{x^2}{2} - \frac{\pi^2}{72}.$$

Задача 4. (10 точки) Да се докаже, че $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \int_1^{x^2+1} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt = 2$.

Решение: Първо пресмятаме интеграла $I = \int_1^{x^2+1} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt$.

$$I = \int_1^{x^2+1} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt = \left.t.\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right|_1^{x^2+1} - \int_1^{x^2+1} td\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right) =$$

$$= \left(x^2+1\right)\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) - \ln 2 - \int_1^{x^2+1} \frac{t\left(-\frac{1}{2}\right)t^{-\frac{3}{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{t}}}dt =$$

$$= \left(x^2+1\right)\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) - \ln 2 + \frac{1}{2}\int_1^{x^2+1} \frac{1}{1+\sqrt{t}}dt.$$

В последния интеграл извършваме смяната $y = \sqrt{t}$ и получаваме

$$\int_1^{x^2+1} \frac{1}{1+\sqrt{t}}dt = \int_1^{\sqrt{x^2+1}} \frac{2y}{1+y}dy = 2\int_1^{\sqrt{x^2+1}} \left(1 - \frac{1}{1+y}\right)dy = 2\left(\int_1^{\sqrt{x^2+1}} dy - \int_1^{\sqrt{x^2+1}} \frac{d(1+y)}{1+y}\right) =$$

$$= 2\left(\left.y\right|_1^{\sqrt{x^2+1}} - \left.\ln(1+y)\right|_1^{\sqrt{x^2+1}}\right) = 2\left(\sqrt{x^2+1} - 1 - \ln\sqrt{x^2+1} + \ln 2\right).$$

Следователно $I = \left(x^2+1\right)\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) - \ln 2 - \frac{1}{2}.2.\left(\sqrt{x^2+1} - 1 - \ln\sqrt{x^2+1} + \ln 2\right) =$

$$=\left(x^2+1\right)\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)-\ln 2-\sqrt{x^2+1}+1+\ln\sqrt{x^2+1}-\ln 2=$$

$$=\left(x^2+1\right)\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)-\sqrt{x^2+1}+1+\ln\sqrt{x^2+1}\,.$$

Следователно

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\int_1^{x^2+1}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}I=\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+1+\frac{\ln\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=$$

$$=\sqrt{x^2+1}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+1+\frac{\ln\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=$$

$$=\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)^{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+1+\frac{\ln\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\,.$$

Нека $u=\sqrt{x^2+1}$. Тогава $u\to\infty$ и

$$L=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\int_1^{x^2+1}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt=\lim_{u\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{u}\right)^u-\frac{1}{u}+1+\frac{\ln u}{u}\right].$$

Тъй като $\lim\limits_{u\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{u}\right)^u=\ln\lim\limits_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u=\ln e=1$, $\lim\limits_{u\to\infty}\frac{1}{u}=0$ и $\lim\limits_{u\to\infty}\frac{\ln u}{u}=\lim\limits_{u\to\infty}\frac{\frac{1}{u}}{1}=\lim\limits_{u\to\infty}\frac{1}{u}=0$,

то $L=2$.