НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

гр. Варна, 14-16 май 2021 г.

Група A

Задача 1. Нека A е реална квадратна матрица от ред n, за която $\det A \neq 0$ и $A^3 + A = \mathbf{O}$.

а) (4 точки) Да се реши относно X уравнението $XA = A^{-1}$.

б) (3 точки) Да се докаже, че $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2021}$ е характеристичен корен на A. Да се посочи пример на такава матрица от ред 2.

в) (3 точки) Възможно ли е редът n на матрицата A да е 2021? Ако не е възможно, го докажете, а ако е възможно, дайте пример.

(С $\mathbf{O}$ означаваме нулевата матрица.)

Решение: От условието имаме, че $A(A^2 + E) = \mathbf{O}$ (E е единичната матрица от ред n) и матрицата A е обратима. Следователно $A^2 = -E$ и $A^{-1} = -A$.

а) Уравнението от условието е еквивалентно на $XA = -A$.

Матрица се умножава или с матрица от подходяща размерност, или с число. Така $X = -E$ или $X = -1$.

Ако λ е характеристичен корен на A, то $\lambda^3 + \lambda = 0$ и $\lambda \neq 0$ ($\det A \neq 0$). Следователно $\lambda = \pm i$. Тъй като A е реална матрица, характеристичните ѝ корени са два по два спрегнати. В частност, всяко едно от числата i и $-i$ е характеристичен корен.

б) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2021} = \left(\dfrac{(1+i)^2}{2}\right)^{2021} = i^{2021} = i$ е характеристичен корен. Една матрица удовлетворяваща условието е $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

в) Тъй като характеристичните корени на матрицата A са спрегнати по двойки, то редът ѝ n е четно число.

Задача 2. (10 точки) Нека A и B са квадратни матрици с реални елементи от ред n, за които е изпълнено $A^2 = A$, $B^2 = B$ и $AB = BA$. Да се докаже, че $AB = \mathbf{O}$ тогава и само тогава, когато $\mathbf{r}(A + B) = \mathbf{r}(A) + \mathbf{r}(B)$.

(С $\mathbf{O}$ означаваме нулевата матрица, а с $\mathbf{r}(A)$ ранга на матрицата A.)

Решение: Нека φ и ψ са линейните оператори в пространството $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ с матрици A и B в стандартния базис на $\mathbb{R}^n$ (за вектор-стълб $v \in \mathbb{R}^n$ $\varphi(v) = Av$ и $\psi(v) = Bv$). Тогава $\varphi^2 = \varphi$, $\psi^2 = \psi$ и $\varphi\psi = \psi\varphi$. Нека $\mathbb{U}_0 = \operatorname{Ker}\varphi$ и $\mathbb{U}_1 = \operatorname{Ker}(\varphi - \mathbf{id}_{\mathbb{V}}) = \operatorname{Im}\varphi$. Тогава $\mathbb{U}_0 \oplus \mathbb{U}_1 = \mathbb{V}$ (за $v \in \mathbb{V}$ $v = (v - \varphi(v)) + \varphi(v)$ и $v - \varphi(v) \in \mathbb{U}_0$, $\varphi(v) \in \mathbb{U}_1$, а $\mathbb{U}_0 \cap \mathbb{U}_1 = \{\mathbf{0}\}$) и $\mathbb{U}_0$ и $\mathbb{U}_1$ са φ-инвариантни. Следователно за φ съществува базис, в който матрицата му е диагонална от нули и единици (φ се диагонализира), т. е. матрицата A е подобна на диагонална от нули и единици. Подпространствата $\mathbb{U}_0$ и $\mathbb{U}_1$ са и ψ-инвариантни:

- Ако $v \in \mathbb{U}_0$, то $\varphi(v) = \mathbf{o}$. Тогава $\varphi(\psi(v)) = \psi(\varphi(v)) = \psi(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$ и $\psi(v) \in \mathbb{U}_0$.

- Ако $v \in \mathbb{U}_1$, то $\varphi(v) = v$. Тогава $\varphi(\psi(v)) = \psi(\varphi(v)) = \psi(v)$ и $\psi(v) \in \mathbb{U}_1$.

Нека ψ_0 и ψ_1 са ограниченията на ψ върху $\mathbb{U}_0$ и $\mathbb{U}_1$ съответно. Тогава те ще са линейни оператори в тези подпространства, за които $\psi_0^2 = \psi_0$ и $\psi_1^2 = \psi_1$ и, следователно, се диагонализират. Това означава, че съществува базис, в който матриците на φ и ψ са диагонални с нули и единици по диагонала. Нека това са матриците P и Q. Тогава съществува обратима матрица T такава, че $A = TPT^{-1}$ и $B = TQT^{-1}$. Следователно

$$AB = \mathbf{O} \Leftrightarrow PQ = \mathbf{O}, \quad \mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(P), \quad \mathbf{r}(B) = \mathbf{r}(Q) \;\text{ и }\; \mathbf{r}(A+B) = \mathbf{r}(P+Q),$$

т. е. без ограничение на общността можем да смятаме, че A и B са диагонални с нули и единици по диагонала.

Ясно е, че $\mathbf{r}(P+Q) = \mathbf{r}(P)+\mathbf{r}(Q)$ тогава и само тогава, когато за всяко $i = 1, 2, n$ $p_{ii}q_{ii} = 0$, което е еквивалентно на $PQ = \mathbf{O}$ (ранговете на матриците P и Q са броят на единиците им по диагонала).

Задача 3. (10 точки) Дадена е редицата $a_0 = 0$ и $a_n = 2n(a_{n-1} + 1)$ за $n \geq 1$. Да се намери

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{a_n}\right).$$

Решение: Разглеждаме частичната сума

$$\sum_{n=1}^{N} \ln\left(1 + \frac{1}{a_n}\right) = \ln \prod_{n=1}^{N} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right) = \ln \frac{a_{N+1}}{2^{N+1}(N+1)!}.$$

От рекурентната връзка получаваме

$$\frac{a_{N+1}}{2^{N+1}(N+1)!} = \frac{a_{N+1}}{2(N+1)} \frac{1}{2^N\, N!} = \frac{a_N + 1}{2^N\, N!} = \frac{a_N}{2^N\, N!} + \frac{1}{2^N\, N!}$$

Индуктивно

$$\frac{a_{N+1}}{2^{N+1}(N+1)!} = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2^k\, k!}$$

Следователно

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \ln\left(1 + \frac{1}{a_n}\right) = \ln \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k\, k!} = \ln \sqrt{e} = \frac{1}{2}.$$

Задача 4. Нека $a_n = \displaystyle\sum_{k=2n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

а) (3 точки) Да се докаже, че $\displaystyle\int_n^{\infty} \frac{dx}{2x(2x+1)} < a_n < \int_{n-1}^{\infty} \frac{dx}{2x(2x+1)}$.

б) (2 точки) Да се намери $\lim\limits_{n\to\infty} na_n$.

в) (5 точки) Ако $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \alpha$, да се намери $\lim\limits_{n\to\infty} n(na_n - \alpha)$.

Решение:

а) Следва от

$$a_n = \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1} \right) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2k(2k+1)}$$

и неравенствата

$$\int_{k}^{k+1} \frac{dx}{2x(2x+1)} < \frac{1}{2k(2k+1)} < \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{2x(2x+1)}.$$

б) От а) имаме

$$\int_{n}^{\infty} \frac{dx}{(2x+1)^2} < \int_{n}^{\infty} \frac{dx}{2x(2x+1)} < a_n < \int_{n-1}^{\infty} \frac{dx}{2x(2x+1)} < \int_{n-1}^{\infty} \frac{dx}{(2x)^2},$$

т. е. $\dfrac{n}{2(2n+1)} < na_n < \dfrac{n}{4(n-1)}$.

Тъй като $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2(2n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{4(n-1)} = \dfrac{1}{4}$, получаваме $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \dfrac{1}{4}$.

в) Ще оценим $\left| \displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2k(2k+1)} - \int_{n-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{dx}{2x(2x+1)} \right|$.

$$\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \frac{dx}{2x(2x+1)} = \frac{1}{2} \ln \frac{2x}{2x+1} \bigg|_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{2k^2+k}{2k^2+k-1} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{2k^2+k-1} \right) = \frac{1}{2k(2k+1)} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^4} \right)$$

Тогава

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2k(2k+1)} - \int_{n-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{dx}{2x(2x+1)} \right| = \mathrm{O}\left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^4} \right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3} \right).$$

Следователно

$$a_n = \int_{n-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{dx}{2x(2x+1)} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{2n}{2n-1} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{2n-1} \right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3} \right) = \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{4(2n-1)^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3} \right),$$

откъдето

$$\lim_{n\to\infty} n \left(na_n - \frac{1}{4} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-n}{4(2n-1)^2} \right) = \frac{1}{16}$$