НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА,
гр. Варна, 10 – 11 май 2019 г.

Национална комисия на НСОМ 2019

Председател: акад. дпн Сава Иванов Гроздев, ВУЗФ – София

Секретар: доц. д-р Илияна Петрова Раева, РУ „Ангел Кънчев“– Русе

Членове:

1. проф. д-р Росен Николаев Николаев, ИУ – Варна
2. проф. д-р Иван Димитров Трендафилов, ТУ – София
3. доц. д-р Асен Иванов Божилов, СУ „Св. Климент Охридски“ – София
4. доц. д-р Димитринка Иванова Владева-Трендафилова, ЛТУ – София
5. доц. д-р Татяна Стефанова Маджарова, ВВМУ „Никола Й. Вапцаров“ – Варна
6. доц. д-р Веселин Андреев Гушев, СУ „Св. Климент Охридски“ – София
7. доц. д-р Станислава Славчева Стоилова, УАСГ – София
8. гл. ас. д-р Петър Иванов Копанов, ПУ „Паисий Хилендарски“ – Пловдив

Жури на НСОМ 2019

Председател: доц. д-р Татяна Стефанова Маджарова, ВВМУ „Никола Й. Вапцаров“ – Варна

Членове:

1. акад. дпн Сава Иванов Гроздев, ВУЗФ – София
2. проф. д-р Росен Николаев Николаев, ИУ – Варна
3. проф. д-р Иван Димитров Трендафилов, ТУ – София
4. доц. д-р Асен Иванов Божилов, СУ „Св. Климент Охридски“ – София
5. доц. д-р Веселин Андреев Гушев, СУ „Св. Климент Охридски“ – София
6. доц. д-р Димитринка Иванова Владева-Трендафилова, ЛТУ – София
7. доц. д-р Иван Иванов Гаджев, СУ „Св. Климент Охридски“ – София
8. доц. д-р Илияна Петрова Раева, РУ „Ангел Кънчев“– Русе
9. доц. д-р Станислава Славчева Стоилова, УАСГ – София
10. гл. ас. д-р Петър Иванов Копанов, ПУ „Паисий Хилендарски“ – Пловдив
11. ас. Петър Василев Стоев, УАСГ – София
12. ас. Виктория Петрова Събева, ВВМУ „Никола Й. Вапцаров”

Организационен комитет на НСОМ 2019

Почетен председател: флотилен адмирал проф. д.в.н. Боян Кирилов Медникаров, Началник на ВВМУ „Никола Й. Вапцаров“

Председател: доц. д-р Татяна Стефанова Маджарова, ВВМУ „Никола Й. Вапцаров“ – Варна

Членове:

1. Капитан I ранг проф. д-р Калин Спасов Калинов – Заместник-началник на ВВМУ по учебната и научната част
2. доц. д-р Веселка Сидерова Радева – катедра „Математика и физика”
3. гл. ас. д-р Антонина Димчева Христова – катедра „Математика и физика”
4. ас. д-р Емилия Радева Колева – катедра „Математика и физика”
5. ас. Виктория Петрова Събева – катедра „Математика и физика” и член на Студентски съвет на ВВМУ
6. Капитан I ранг о.р. Светослав Димитров Димитранов – помощник-ректор на ВВМУ
7. Капитан II ранг Вълчо Атанасов Атанасов – Началник на отдел „Учебна и научна дейност“
8. Капитан - лейтенант ас. Станислава Тодорова Стефанова – Началник на секция „Научна и международна дейност“
9. Йорданка Димова Петева – секция „Връзки с обществеността“
10. Милена Стоянова Банкова – главен счетоводител на ВВМУ

Група A

Задача 1. Нека $k, n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ е

$$A_k(n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \dfrac{a}{n} & \dfrac{a}{n} & \dfrac{a}{n} & \cdots & \dfrac{a}{n} \\ \dfrac{a^2}{n} & \dfrac{a^2}{n} & \dfrac{a^2}{n} & \cdots & \dfrac{a^2}{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{a^k}{n} & \dfrac{a^k}{n} & \dfrac{a^k}{n} & \cdots & \dfrac{a^k}{n} \end{pmatrix}$$

е квадратна матрица от ред $k+1$. Да се пресметне $\lim\limits_{n\to\infty} (A_k(n))^n$.

Решение: Пресмята се

$$(A_k(n))^2 = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{a}{n} \cdot \dfrac{a^k - 1}{a-1} & \cdots & 1 + \dfrac{a}{n} \cdot \dfrac{a^k - 1}{a-1} \\ \dfrac{a}{n}\left(1 + \dfrac{a}{n} \cdot \dfrac{a^k - 1}{a-1}\right) & \cdots & \dfrac{a}{n}\left(1 + \dfrac{a}{n} \cdot \dfrac{a^k - 1}{a-1}\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{a^k}{n}\left(1 + \dfrac{a}{n} \cdot \dfrac{a^k - 1}{a-1}\right) & \cdots & \dfrac{a^k}{n}\left(1 + \dfrac{a}{n} \cdot \dfrac{a^k - 1}{a-1}\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \left(1 + \frac{a}{n} \cdot \frac{a^k - 1}{a-1}\right) A_k(n), \text{ където } a \neq 1.$$

Оттук по индукция $(A_k(n))^n = \left(1 + \dfrac{a}{n} \cdot \dfrac{a^k - 1}{a-1}\right)^{n-1} A_k(n)$. Следователно

$$\lim_{n\to\infty} (A_k(n))^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n} \cdot \frac{a^k - 1}{a-1}\right)^{n-1} A_k(n) = e^{a\frac{a^k-1}{a-1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

При $a = 1$ се пресмята $(A_k(n))^2 = \left(1 + \dfrac{k}{n}\right) A_k(n)$, откъдето следва

$(A_k(n))^n = \left(1+\dfrac{k}{n}\right)^{n-1} A_k(n)$ и следователно

$$\lim_{n\to\infty} (A_k(n))^n = e^k \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right).$$

Задача 2. а) Нека $\begin{vmatrix} a & 2019b & 2019c & 2019d \\ d & a & 2019b & 2019c \\ c & d & a & 2019b \\ b & c & d & a \end{vmatrix} = 0$, където a, b, c, d са рационални числа. Да се докаже, че $a = b = c = d = 0$.

б) Докажете, че съществува полином $P(x)$ с цели коефициенти такъв, че

$$P\left(x+\frac{1}{x}\right) = x^{2019} + \frac{1}{x^{2019}}.$$

Решение: а) Нека допуснем, че поне едно от числата е ненулево. Без ограничени на общността можем да считаме, че числата a, b, c и d са цели и взаимно прости (можем да умножим всеки ред с най-големия общ делител на числителите и да разделим на най-големия общ делител на числителите). Разглеждайки детерминантата по модул 2019, получаваме триъгълна детерминанта и $a^4 \equiv 0 \pmod{2019}$. Тъй като $2019 = 3.673$, където 3 и 673 са прости, то a се дели на 2019. Нека $a = 2019a_1$. Тогава

$$\begin{vmatrix} 2019a_1 & 2019b & 2019c & 2019d \\ d & 2019a_1 & 2019b & 2019c \\ c & d & 2019a_1 & 2019b \\ b & c & d & 2019a_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Като изнесем от първия ред 2019 и разменим редовете, така че първият ред да стане последен, получаваме

$$\begin{vmatrix} d & 2019a_1 & 2019b & 2019c \\ c & d & 2019a_1 & 2019b \\ b & c & d & 2019a_1 \\ a_1 & b & c & d \end{vmatrix} = 0,$$

получаваме аналогична детерминанта, но с d по диагонала. Следователно и d се дели на 2019. Аналогично можем да допуснем, че b и c се делят на 2019. Противоречие!

б) Ще докажем по индукция, че за всяко нечетно естествено n съществува полином $P_n(x)$ с цели коефициенти такъв, че $P_n\left(x+\dfrac{1}{x}\right) = x^n + \dfrac{1}{x^n}$. При $n = 2019$ следва решението. За $n = 1$ твърдението тривиално е вярно: $P_1(x) = x$. Нека е вярно и за всяко нечетно $n \leq 2m-1$. Тогава за $n = 2m+1$ имаме:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2m+1} = \left(x^{2m+1}+\frac{1}{x^{2m+1}}\right) + C_{2m+1}^1\left(x^{2m-1}+\frac{1}{x^{2m-1}}\right)$$

$$+C_{2m+1}^2\left(x^{2m-3}+\frac{1}{x^{2m-3}}\right) + ... + C_{2m+1}^m\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

Оттук следва зависимостта

$$y^{2m+1} = P_{2m+1}(y)+C_{2m+1}^1 P_{2m-1}(y)+C_{2m+1}^2 P_{2m-3}(y)+.....+C_{2m+1}^m P_1(y)$$

и твърдението е доказано индуктивно.

Задача 3. Да се докаже, че следната граница съществува и е крайна

$$\lim_{t\to 0_+}\left(\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4+t^4}} + \ln t\right).$$

Решение:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4+t^4}} = \int_0^1 \frac{d\frac{x}{t}}{\sqrt[4]{\left(\frac{x}{t}\right)^4+1}} = \int_0^s \frac{dy}{\sqrt[4]{y^4+1}},$$

където $s = \dfrac{1}{t} \xrightarrow[t\to 0^+]{} \infty$. Разглеждаме функцията

$$g(s) = \int_0^s \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4+1}} - \ln s.$$

Тъй като

$$g(s) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4+1}} - \int_1^s \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^4+1}}\right) dx,$$

то е достатъчно да покажем, че

$$\int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^4+1}}\right) dx$$

е сходящ.

Но след двукратно използване на формулата $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$ получаваме

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^4+1}}=\frac{\sqrt[4]{x^4+1}-x}{x\sqrt[4]{x^4+1}}=\frac{1}{x\sqrt[4]{x^4+1}(\sqrt[4]{x^4+1}+x)(\sqrt{x^4+1}+x^2)}<\frac{1}{x^5},$$

с което сходимостта на горния интеграл е доказана.

Група Б

Задача 1. Нека A, B и C са квадратни матрици от ред n, като A е обратима и $AB = 3A + CA$. Елементите на матрицата C от последния ред са единици, а останалите ѝ елементи са нули.

а) Да се докаже, че $C^2 = C$ и да се изрази матрицата B чрез матриците A и C.

б) Да се намери матрицата $D = B^2 - 7B + 12E$, където E е единичната матрица от ред n.

Решение: а) Равенството $C^2 = C$ се установява чрез непосредствена проверка. След като умножим равенството $AB = 3A + CA$ отляво с A^{-1} се получава $B = 3E + A^{-1}CA$.

б) Тогава

$$D = B^2 - 7B + 12E = (B - 3E)(B - 4E) =$$

$$= A^{-1}CA(A^{-1}CA - E) = A^{-1}(C^2 - C)A = 0.$$

Следователно D е нулевата матрица.

Задача 2. През точката $C(0, 1)$ е прекарана права с ъглов коефициент k, която пресича графиката на функцията $y = x^2$ в точките A и B.

а) Да се докаже, че $\angle AOB$ е прав, където O е координатното начало.

б) Да се пресметне дължината на дъгата $\widehat{AOB}$ за $k = \dfrac{3}{2}$.

Решение: а) Дадената права има уравнение $y = kx + 1$. Тогава точките A и B имат съответно координати (x_1, x_1^2) и (x_2, x_2^2), където x_1 и x_2 са решения на уравнението $x^2 - kx - 1 = 0$. От скаларното произведение на векторите $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ и формулите на Виет за квадратното уравнение имаме

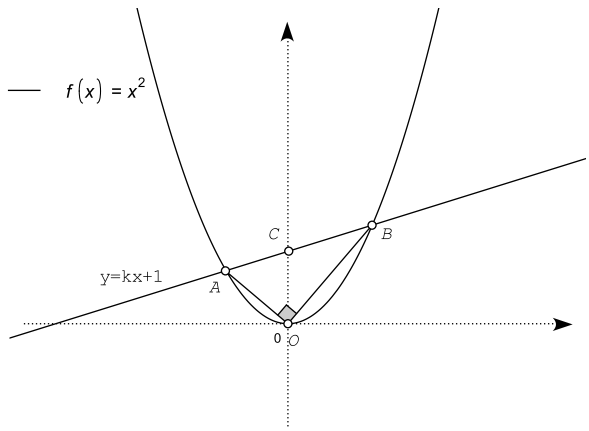
$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = x_1x_2 + x_1^2x_2^2 = 0,$$

т. е. $\angle AOB$ е прав.

б) За дължината l на дъгата $\widehat{AOB}$ имаме

$$l = \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + 4x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,x\sqrt{1 + 4x^2}\Big|_{x_1}^{x_2} + \frac{1}{4}\,\ln(x + \sqrt{1 + 4x^2})\Big|_{x_1}^{x_2},$$

където $x_1 < x_2$. Сега при $k = \dfrac{3}{2}$ $x_1 = -\dfrac{1}{2}$, $x_2 = 2$ и за l получаваме $l = \sqrt{17} + \dfrac{\sqrt{2}}{4} + \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{4+2\sqrt{17}}{2\sqrt{2}-1}$.



Задача 3. а) Да се намери най-малката стойност на функцията

$$y = e^{\frac{x^2}{2}}.$$

б) Нека $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Да се докаже, че

$$\frac{b-a}{(1+b)^2} \le f(b) - f(a) \le \frac{b-a}{1+a^2},$$

ако $0 < a \le b$.

в) Ако $g(x) = f(f'(x))$, където $f(x) = \operatorname{arctg} x$, да се докаже, че

$$e^{\frac{x^2}{2}} > g(x)$$

за всяко реално x.

Решение: а) $y' = xe^{\frac{x^2}{2}}$. Функцията достига локален минимум при $x = 0$ и $y_{min} = y(0) = 1$. Тъй като $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{\frac{x^2}{2}} = +\infty$ и функцията е непрекъсната за всяко реално x, то минимумът е глобален и най-малката стойност на функцията е $y(0) = 1$.

б) Очевидно неравенството е изпълнено при $a = b$.

Нека $a \ne b$. От теоремата на Лагранж за функцията $f(x) = \operatorname{arctg} x$ в интервала $[a, b]$ следва, че съществува точка $c \in (a, b)$, такава че $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$ или $\dfrac{1}{1+c^2} = \dfrac{\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a}{b-a}$.

След разделяне на $b-a$ в даденото неравенство, задачата се свежда до доказването на $\frac{1}{(1+b)^2} < \frac{1}{1+c^2} < \frac{1}{1+a^2}$ при $0 < a < c < b$. Дясното неравенство очевидно е изпълнено.
Тъй като $b > 0$, то $1+b^2 < 1+2b+b^2$ и съответно $\frac{1}{(1+b)^2} < \frac{1}{1+b^2}$, т.е. $\frac{1}{(1+b)^2} < \frac{1}{1+b^2} < \frac{1}{1+c^2} < \frac{1}{1+a^2}$.

в) $g(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{1+x^2}$ и съответно

$$g'(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{(1+x^2)}}\left(-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right) = -\frac{2x}{1+(1+x^2)^2}.$$

Функцията достига локален максимум при $x = 0$ и $g_{max} = g(0) = \frac{\pi}{4}$. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{1+x^2} = 0$ и функцията е непрекъсната за всяко реално x, следователно $g(0) = \frac{\pi}{4}$ е глобален максимум. От $g(x) \leq \frac{\pi}{4}$ и от полученото в подусловие а) следва, че $e^{\frac{x^2}{2}} \geq 1 > \frac{\pi}{4} \geq \operatorname{arctg} \frac{1}{1+x^2}$ е изпълнено за всяко реално x.

Група B

Задача 1. Дадена е матрицата $A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{N}$.

а) Да се намери A^3.

б) Да се намери A^n, $n \in \mathbb{N}$.

в) Да се докаже, че ако ab се дели на $a+b$, то и сумата от елементите на матрицата A^{2019} се дели на $a+b$.

Решение: а) Намираме последователно $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & a\left(a+b\right) \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$ и $A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & a\left(a^2+ab+b^2\right) \\ 0 & b^3 \end{pmatrix}$.

б) Допускаме, че $A^n = \begin{pmatrix} a^n & a.\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i}.b^i \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$.

Тогава $A^{n+1} = A^n.A = \begin{pmatrix} a^{n+1} & a.\sum_{i=0}^{n} a^{n-i}.b^i \\ 0 & b^{n+1} \end{pmatrix}$. От принципа на пълната математическа индукция следва, че допускането е вярно.

в) Сумата от елементите на матрицата A^{2019} е равна на

$$S = a^{2019} + b^{2019} + a\left(a^{2018} + a^{2017}b + \ldots + ab^{2017} + b^{2018}\right) = \\ = (a+b)P + a\left(a^{2018} + b^{2018}\right) + a.abQ.$$

Тъй като ab се дели на $a+b$, то $ab = R(a+b)$ и $S = (a+b)P + a\left(a^{2018}+b^{2018}\right) + a.(a+b)QR = (a+b)\left(P + aQR\right) + a\left(a^{2018}+b^{2018}\right)$.

Тъй като първото събираемо се дели на $a+b$, то е достатъчно да покажем, че $a^{2018}+b^{2018}$ се дели на $a+b$. От развитието на $(a+b)^{2018}$ в Нютонов бином имаме:

$(a+b)^{2018} = a^{2018} + C_{2018}^{1}a^{2017}b + C_{2018}^{2}a^{2016}b^2 + \ldots + C_{2018}^{2017}ab^{2017} + b^{2018}$.

Очевидно лявата страна на равенството се дели на $a+b$. Освен това, всяко от събираемите в дясната страна, с изключение на първото и последното, също се дели на $a+b$ (по условие ab се дели на $a+b$).Следователно и $a^{2018}+b^{2018}$ се дели на $a+b$.

Задача 2. През точката $C(0,1)$ е прекарана права с ъглов коефициент k, която пресича графиката на функцията $y = x^2$ в точките A и B.

а) Да се докаже, че $\angle AOB$ е прав, където O е координатното начало.

б) Да се пресметне лицето на $\triangle AOB$.

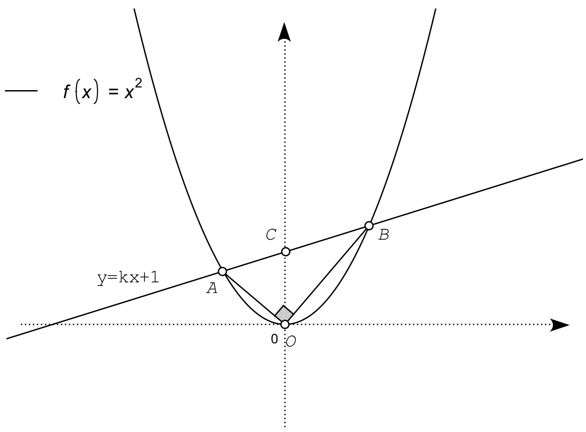
Решение: а) Дадената права има уравнение $y = kx + 1$. Тогава точките A и B имат съответно координати (x_1, x_1^2) и (x_2, x_2^2), където x_1 и x_2 са решения на уравнението $x^2 - kx - 1 = 0$. От скаларното произведение на векторите $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ и формулите на Виет за квадратното уравнение имаме

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = x_1x_2 + x_1^2x_2^2 = 0,$$

т. е. $\angle AOB$ е прав.

б) За лицето на $\triangle AOB$ имаме

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}|.|\overrightarrow{OB}| = \frac{1}{2}\sqrt{x_1^2 + x_1^4}\sqrt{x_2^2 + x_2^4} =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{x_1^2x_2^2 + x_1^2x_2^2(x_1^2 + x_2^2) + x_1^4x_2^4} = \frac{1}{2}\sqrt{k^2 + 4}.$$



Задача 3. Дадена е редицата $\{a_n\}_0^\infty$ от реални числа, за която $a_0 = 1$ и

$$a_n = 2 + \sqrt{a_{n-1}} - 2\sqrt{1 + \sqrt{a_{n-1}}}.$$

Да се докаже, че редицата е сходяща и да се намери $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Решение: $a_0 = 1$,

$a_n = 2 + \sqrt{a_{n-1}} - 2\sqrt{1 + \sqrt{a_{n-1}}} = \left(\sqrt{1 + \sqrt{a_{n-1}}} - 1\right)^2 > 0$, т.е. $a_n > 0$.

$$a_n - a_{n-1} = \left(\sqrt{1 + \sqrt{a_{n-1}}} - 1\right)^2 - \left(\sqrt{a_{n-1}}\right)^2 =$$
$$= \left(\sqrt{1 + \sqrt{a_{n-1}}} - 1 - \sqrt{a_{n-1}}\right)\left(\sqrt{1 + \sqrt{a_{n-1}}} - 1 + \sqrt{a_{n-1}}\right) =$$
$$= \sqrt{1 + \sqrt{a_{n-1}}}\left(1 - \sqrt{1 + \sqrt{a_{n-1}}}\right)\left(\sqrt{1 + \sqrt{a_{n-1}}} - 1 + \sqrt{a_{n-1}}\right) < 0$$

$\Rightarrow \ a_n < a_{n-1}$.

Редицата $\{a_n\}$ е ограничена и монотонно намаляваща. Следователно $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Означаваме $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Тогава $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{1+\sqrt{a_{n-1}}}-1\right)^2$, т.е. $a = \left(\sqrt{1+\sqrt{a}}-1\right)^2 \Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{1+\sqrt{a}}-1 \Rightarrow 1+\sqrt{a} = \sqrt{1+\sqrt{a}}$ $\Rightarrow \sqrt{1+\sqrt{a}}\left(\sqrt{1+\sqrt{a}}-1\right) = 0$. След разделяне на $\sqrt{1+\sqrt{a}} > 0$ в последното уравнение се получава $\sqrt{1+\sqrt{a}}-1 = 0$ или $1+\sqrt{a} = 1 \Rightarrow a = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.