Министерство на образованието и науката

Лесотехнически университет   Фондация ЕВРИКА

Национално представителство на студенските съвети

Студентски съвет ЛТУ

НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

ЛТУ ЮНДОЛА

18 - 20 МАЙ 2018

$$e^{2\pi i}=1$$

Задачи на темата за група А

Задача 1. Равностранни триъгълници със страни 1,3,5,7,... са наредени последователно един до друг, така че основите им лежат на една права, а третите им върхове лежат в едната полуравнина на тази права. Докажете, че тези върхове лежат на парабола и разстоянията от тях до фокуса на параболата са цели числа.

Решение. Приемаме за абсциса правата, на която лежат основите на триъгълниците, а ординатата приемаме да минава през върха на първия триъгълник, нележащ на основата. Тогава третите върхове ще имат координати $(0, \frac{1}{2}\sqrt{3})(2, \frac{3}{2}\sqrt{3}), (6, \frac{5}{2}\sqrt{3}), (12, \frac{7}{2}\sqrt{3})...(n.(n-1), \frac{2n-1}{2}\sqrt{3})$.

С изключване на n в общата формула получаваме зависимостта

$$y^2 = 3.\left(x + \frac{1}{4}\right).$$

Това е уравнение на парабола с фокус в точката $(\frac{1}{2}, 0)$.

Разстоянието от върха $(n.(n-1), \frac{2n-1}{2}\sqrt{3})$ до този фокус е

$$n^2 - n + 1,$$

което е цяло число.

Задача 2. Да се намерят всички линейни изображения $\varphi\colon M_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, такива че за всеки две матрици $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ е изпълнено $\varphi(AB) = \varphi(BA)$.

Решение. Нека E_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$, са матричните единици, т. е. матриците, на които всички елементи са равни на 0, с изключение на елемента, който се намира в $i^{\text{и}}$ ред и $j^{\text{и}}$ стълб, който е равен на 1. Ясно е, че образът на нулевата матрица $\mathbf{O}$ под действието на φ е нула.

Тогава за произволни i, j, k, получаваме $\varphi(E_{ik}) = \varphi(E_{ij}E_{jk}) = \varphi(E_{jk}E_{ij}) = \varphi(\delta_{ik}E_{jj})$. Оттук за произволни $i \neq k$ ще имаме $\varphi(E_{ik}) = 0$, а за произволни $k = i$ и j, $\varphi(E_{ii}) = \varphi(E_{jj})$. Нека $\varphi(E) = n\alpha$ за някое $\alpha \in \mathbf{R}$. Тогава (от линейност) за $i = 1, 2, \ldots, n$ $\varphi(E_{ii}) = \alpha$ и за произволна матрица $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{R})$ е изпълнено, че

$$\varphi(A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\varphi(E_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\varphi(E_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\alpha = \alpha\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \alpha\,\mathrm{tr}(A)$$

Задача 3. Дадена е редицата: $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{na_n}$ за $n \geq 1$.

а) Да се докаже, че редът $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{na_n}$ е разходящ.

б) Да се докаже, че редът $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{na_n \ln n}$ е сходящ.

в) Да се намери за кои α редът $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{na_n^{\alpha}}$ е сходящ.

Решение. Очевидно, $a_k \geq 1$ за $k \geq 1$. И от

$$a_{k+1}^2 = \left(a_k + \frac{1}{ka_k}\right)^2 = a_k^2 + \frac{2}{k} + \frac{1}{k^2 a_k^2}$$

получаваме

$$a_k^2 + \frac{2}{k} \leq a_{k+1}^2 \leq a_k^2 + \frac{3}{k}.$$

Сумирайки така получените неравенства от 1 до n

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq a_{n+1}^2 \leq 1 + 3\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Тъй като $\ln n < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \ln(n+1)$, то

$$\sqrt{1 + 2\ln n} \leq a_{n+1} \leq \sqrt{1 + 3\ln n}, \quad \text{откъдето}$$

$$\sqrt{\ln n} < a_{n+1} < 2\sqrt{\ln(n+1)}.$$

Оттук следват а) и б), както и че редът $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{na_n^{\alpha}}$ е сходящ за $\alpha > 2$.

Задачи и решения на темата за група Б

Задача 1. Нека A е квадратна матрица от ред 2, различна от нулевата и единичната, за която $A^2 = A$.

а) Да се докаже, че $\det(A) = 0$

б) Да се докаже, че сумата от елементите по главния диагонал на A е равна на 1.

Решение: От условието се получава, че $A(A - E) = \mathbf{O}$, където E и $\mathbf{O}$ са едничната и нулевата матрици от ред 2.

а) Ако $\det A \neq 0$ след умножение отляво на горното равенство с A^{-1} следва, че $A = E$, т. е. $\det A = 0$.

б) Аналогично $\det(A - E) = 0$. Така собствените стойности на A са нула и едно. Сега твърдението се получава с формулите на Виет за характеристичното уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ на A.

2 Решение(без собствени стойности): Нека $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. От условието се получава, че $a^2 + bc = a$, $b(a + d) = b$ и $c(a + d) = c$. От изискването $A \neq \mathbf{O}, E$ следва, че поне едно от числата b и c не е нула. Тогава $a + d = 1$. От друга страна $\det A = ad - bc = ad - a + a^2 = a(a + d - 1) = 0$.

Задача 2. Да се пресметне интеграла

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin^{2018} x + \cos x}{\sqrt{1 + 3\sin^2 x}} \mathrm{d}x.$$

Решение: Разбиваме на сума от два интеграла. Единият е нула заради симетричния интервал и нечетността на подинтегралната функция. За другия се получава (подинтегралната функция е четна):

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1 + 3\sin^2 x}} \mathrm{d}x = 2 \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d} \sin x}{\sqrt{1 + 3\sin^2 x}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \ln\left(\sqrt{3} \sin x + \sqrt{1 + 3\sin^2 x}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \ln(\sqrt{3} + 2).$$

Задача 3. Дадени са линиите $\gamma_1 : xy = a$ и $\gamma_2 : xy = -b$, $a > 0,\ b > 0$. Нека правата $p_1 : y = k_1 x$ пресича γ_1 в точките A и C, а правата $p_2 : y = -k_2 x$ пресича γ_2 в точките B и D.

а) Да се докаже, че лицето S_{ABCD} на четириъгълника $ABCD$ е не по-малко от $4\sqrt{ab}$.

б) Да се докаже, че $S_{ABCD} = 4\sqrt{ab}$ само когато правите p_1 и p_2 са симетрични относно оста Oy.

Решение: а) Като изразим координатите на точките A, B, C и D чрез k_1 и k_2 получаваме $\overrightarrow{OA} = \left(\sqrt{\frac{a}{k_1}}, \sqrt{ak_1}\right) = -\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OB} = \left(-\sqrt{\frac{b}{k_2}}, \sqrt{bk_2}\right) = -\overrightarrow{OD}$. Тогава

$S_{ABCD} = |\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}| = \left(= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD}|\right) = 2\sqrt{ab}\left(t + \frac{1}{t}\right)$, където $t = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}$. След намиране на най-малката стойност на функцията $t + \frac{1}{t}$ при $t > 0$ се получава, че $S_{ABCD} \geq 4\sqrt{ab}$, като равенството се достига само за $t = 1$.

б) Равенство имаме само когато $k_1 = k_2$. Това означава, че сумата на ъглите, който правите p_1 и p_2 сключват с оста Ox е 180°, откъдето следва исканата симетрия.

Разбира се, може да се въведат и други параметри като например абсцисите на A и B и т. н.

Задачи и решения на темата за група В

Задача 1. Нека числата a_{ij} са остатъците при деление на 2 на числата $i^j + j^i$.
а) Пресметнете

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

б) Пресметнете

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Решение: Непосредствено се пресмята

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

заради наличието на еднакви редове.

Задача 2. Нека x_1, x_2, x_3 и x_4 са цели числа като x_1 и x_2 са корени на уравнението $x^2 - 2x_3x - x_4 = 0$, а x_3 и x_4 са корени на уравнението $x^2 - 2x_1x - x_2 = 0$. Да се намерят числата x_1, x_2, x_3 и x_4.

Решение: Прилагаме формулите на Виет за двете уравнения и получаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} x_3 + x_4 = 2x_1 \\ x_3x_4 = -x_2 \\ x_1 + x_2 = 2x_3 \\ x_1x_2 = -x_4. \end{array} \right.$$

Очевидно, ако някое от x_i е равно на нула, то и останалите са нули. Нека сега $x_i \neq 0$. След съответните преобразувания на системата получаваме уравнението $x_4^3 - 2x_4^2 - 12x_4 - 9 = 0$, което има корени -1 и $\dfrac{3 \pm 3\sqrt{5}}{2}$. Окончателно целите решения са $(0,0,0,0)$ и $(-1,-1,-1,-1)$.

Задача 3. В правоъгълна координатна система в равнината точките $A(0,0)$, $B(1,0)$ и $C(0,1)$ са върхове на $\triangle ABC$, за който $\angle BAC = 90°$ и $AB = AC = 1$. Точките M и N са съответно върху страните BC и AC така, че $\angle CBN = \angle CAM$ и $AM \cap BN = P$.

а) Да се определи уравнението и видът на кривата k, която описва P, когато точката M описва отсечката BC;

б) Ако P_0 е такава вътрешна точка за $\triangle ABC$, че допирателната t_0 към k през P_0 е успоредна на AC, да се определят разстоянията от P_0 до AB и AC.

Решение: а) Ако $\angle MAC = \theta$, то $\angle ABP = 45^\circ - \theta$. Нека x и y са координатите на P. Тогава $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{x}{y}$ и $\operatorname{tg}(45^\circ - \theta) = \dfrac{y}{1-x}$. Имаме $\operatorname{tg}(45^\circ - \theta) = \dfrac{\operatorname{tg}45^\circ - \operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}45^\circ \operatorname{tg}\theta}$ и $\dfrac{y}{1-x} = \dfrac{1-\frac{x}{y}}{1+\frac{x}{y}}$. Търсената крива е $k : x^2 - 2xy - y^2 - x + y = 0$, която записваме във вида $(x-y)^2 - 2y^2 - (x-y) = 0$. Оттук $\left(x - y - \dfrac{1}{2}\right)^2 - 2y^2 = \dfrac{1}{4}$ и $k : \dfrac{\left(x-y-\frac{1}{2}\right)^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, където $a = \dfrac{1}{2}$ и $b = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. Последното равенство означава, че k е хипербола с полуоси $a = \dfrac{1}{2}$ и $b = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. Центърът ѝ $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ е средата на катета AB.

б) Нека x_0 и y_0 са координатите на P_0. Общите точки на правата t_0 с уравнение $x = x_0$ и k удовлетворяват уравнението $y^2 + (2x_0 - 1)y - x_0^2 + x_0 = 0$. Правата t_0 има само една обща точка с k тогава и само тогава, когато $(2x_0-1)^2 - 4(x_0 - x_0^2) = 0$. Последното е изпълнено, когато $x_0' = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$ и $x_0'' = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$. След заместване в последното уравнение относно y получаваме $y_0' = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ и $y_0'' = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. Само точката $(x_0'', y_0'') = \left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}, \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$ е вътрешна за $\triangle ABC$ и следователно $P_0\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}, \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$. Разстоянията до AB и AC са съответно $\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$ и $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.