ÍÑÎÌ, Ñîçîïîë,
2 þíè 2007

Група А

Задача 1: Нека M е $m \times m$ матрица с елементи 0 и 1, такава че всеки ред на M съдържа точно $k+1$ единици, и за всеки $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq m$, съществува единствено p, $1 \leq p \leq m$, за което $a_{ip} = a_{jp} = 1$. Докажете, че:

а) $m = k^2 + k + 1$;

б) всеки стълб на M съдържа точно $k+1$ единици;

в) съществува такава матрица при $m = 7$.

Решение:

а) Директно се пресмята, че $MM^T = kE + J$ и $MJ = (k+1)J$, където E е единичната матрица, а J е матрицата, състояща се само от единици, и двете от ред m. Лесно се пресмята, че $J^2 = mJ$, следователно $JMJ = (k+1)J^2 = (k+1)mJ$. Тъй като M е неособена,

$$\begin{aligned} JM &= J(kE+J)(M^T)^{-1} \\ &= (kJ + J^2)(M^T)^{-1} \\ &= (k+m)(M^{-1}J)^T \\ &= \frac{k+m}{k+1}J. \end{aligned}$$

Оттук следва, че $JMJ = \frac{k+m}{k+1}mJ$. Като приравним двата израза за JMJ, получаваме $m = k^2 + k + 1$.

б) $JM = \frac{k+m}{k+1}J = \frac{(k+1)^2}{k+1}J = (k+1)J$, което показва, че всеки стълб на M съдържа точно $k+1$ единици.

в) Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 2:

а) Да се докаже, че съществува неконстантна непрекъсната периодична функция $f : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$, удовлетворяваща уравнението

$$f(x+1) + f(x-1) = pf(x) \tag{1}$$

тогава и само тогава, когато $|p| \leq 2$;

б) При $p = \sqrt{2}$, да се намери решение с период цяло число.

Решение:

а) Ще търсим решение на функционалното уравнение от вида $\varphi(x) = \cos \alpha x$. Замествайки, получаваме

$$\cos \alpha(x-1) + \cos \alpha(x+1) = p \cos \alpha x = 2 \cos \alpha \cos \alpha x$$

и след преобразуване на лявата част стигаме до $\cos \alpha = \frac{p}{2}$, т.е. за $\alpha = \arccos \frac{p}{2}$ функцията $\varphi(x) = \cos \alpha x$ е решение на функционалното уравнение (1) за $|p| < 2$. По абсолютно същия начин заключаваме, че функцията $\varphi(x) = \sin \alpha x$ също е решение на (1). Следователно всяка функция от вида

$$\varphi(x) = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x$$

е решение на (1).

Да отбележим, че сега лесно можем да решим условие б); наистина, ако $p = \sqrt{2}$, то $\alpha = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$. Ясно е, че при $k = 0$ и $\alpha = \frac{\pi}{4}$ решението $\cos \frac{\pi x}{4}$ има период $T = 8$.

Обратно, ако $|p| > 2$, търсим решение на (1) от вида $\varphi(x) = \lambda^x$, след заместване стигаме до характеристичното уравнение

$$\lambda^2 - p\lambda + 1 = 0$$

от където лесно се вижда, че има два различни положителни корена λ_1, λ_2 и както по-горе заключаваме, че при фиксирано x_0 съществуват константи C_1, C_2 такива че

$$f(x) = C_1\lambda_1^x + C_2\lambda_2^x \text{ за всяко } x \in x_0 + \mathsf{Z}.$$

Но понеже C_1, C_2 не са едновременно равни на 0, следва че функцията $f(x)$ е неограничена и следователно не може да бъде периодична.

Остава да разгледаме случаите $p = \pm 2$. Нека $p = 2$ и да разгледаме периодичната функция $f(x)$, която има период 1 и за която $f(x) = |x|$ в интервала $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Очевидно за тази функция $f(x+1) + f(x-1) = 2f(x)$. За $p = -2$ разглеждаме периодичната функция $g(x)$, която има период 2 и за която $g(x) = |x| - \frac{1}{2}$ в интервала $[-1, 1]$. Очевидно за тази функция $f(x+1) + f(x-1) = -2f(x)$.

Забележка: Поради техническа грешка в условието на задачата беше пропуснато изискването за непрекъснатост на функцията $f(x)$. $\square$

Задача 3: Да се докаже, че:

$$\text{а)} \quad \sqrt{1+x} \;=\; \cos\frac{\arcsin x}{2} + \sin\frac{\arcsin x}{2} \quad \text{за} \quad x \in [0,1]\,;$$

$$\text{б)} \quad \int_0^{\pi/2} f(\sin 2t)\cos t dt = \int_0^{\pi/2} f(\cos^2 t)\cos t dt$$

за всяка непрекъсната функция $f\,:\,[0,1] \to \mathsf{R}$.

Решение:

а) Да положим $y = \arcsin x$. Тогава $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\frac{y}{2} + \sin\frac{y}{2} \geq 0$ и

$$1 + \sin y = \cos^2\frac{y}{2} + 2\cos\frac{y}{2}\sin\frac{y}{2} + \sin^2\frac{y}{2} = \left(\cos\frac{y}{2} + \sin\frac{y}{2}\right)^2 .$$

б) Сменяйки променливите, получаваме

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin 2t)\cos t dt \;=\; \left\{t = \frac{u}{2}\right\} \;=\; \frac{1}{2}\int_0^{\pi} f(\sin u)\cos\frac{u}{2}du \;=$$

$$=\; \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi/2} f(\sin u)\cos\frac{u}{2}du + \int_{\pi/2}^{\pi} f(\sin u)\cos\frac{u}{2}du\right) \quad ,$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} f(\sin u)\cos\frac{u}{2}du \;=\; \{u = \pi - v\} \;=\; \int_0^{\pi/2} f(\sin v)\sin\frac{v}{2}dv \quad ,$$

$$\int\limits_0^{\pi/2} f(\sin 2t)\cos t dt \;=\; \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} f(\sin v)\left(\cos\frac{v}{2}+\sin\frac{v}{2}\right)dv \;=$$

$$\{v=\arcsin x\} \;=\frac{1}{2}\int\limits_0^{1} f(x)\left(\cos\frac{\arcsin x}{2}+\sin\frac{\arcsin x}{2}\right)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{и}$$

$$\int\limits_0^{\pi/2} f(\cos^2 t)\cos t dt \;=\; \left\{t=\arccos\sqrt{x}\right\} \;=\frac{1}{2}\int\limits_0^{1} f(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x}} \quad .$$