Национаната студентска олимпиада по математика се провежда ежегодно под егидата на СМБ и Министерството на образованието, младежта и науката. През 2011 г. олимпиадата се провежда с любезното съдействие на Фондация „Еврика“.

Национална комисия

проф. дпн Сава Гроздев, ВУЗФ – председател

гл. ас. Паскал Пиперков, ВТУ – секретар

проф. дмн Гено Николов, СУ

доц. д-р Петър Рашков, РУ

доц. д-р Владимир Тодоров, УАСГ

доц. д-р Владимир Бабев, СУ

доц. д-р Теменужка Пенева, ПУ

доц. д-р Росен Николаев, ИУ Варна

гл. ас. Илияна Раева, РУ

Националната студентска олимпиада по математика (НСОМ) е състезание за студенти по бакалавърски или магистърски програми, чиято цел е повишаване на интереса към математиката и създаване на условия за обмен на опит. НСОМ се провежда ежегодно от 1974 г. насам. Основни организатори са Съюзът на математиците в България (СМБ) и висшите училища, а от 2010 г. и Министерството на образованието, младежта и науката (МОМН). Традиционен партньор е Фондация „Еврика“. Участниците се разпределят в три състезателни групи според професионалното направление, в което е специалността им: Група А - математика, информатика и компютърни науки; Група Б - природни и технически науки, сигурност и отбрана; Група В - всички неизброени в групи А и Б. Най-добре представилите се получават медали съгласно традицията в международните олимпиади по математика - награждават се до 50 % от участниците в приблизително съотношение 1:2:3 за златен, сребърен и бронзов медал. Организацията по подготовката и провеждането на НСОМ се осъществява от Национална комисия, която се утвърждава от МОМН и СМБ. Националната комисия определя членовете на Жури, което съставя състезателните задачи и проверява писмените работи.

Домакин през настоящата 2011 г. е Висшето училище по застраховане и финанси, което осигури всички необходими условия за регистрация и настаняване на участниците, за работа на журито и за самото протичане на състезанието. За предоставянето на прекрасната база на училището и на изключително уютната хотелска част, както и за любезното отношение на служителите и преподавателите от ВУЗФ сме изключително признателни и отправяме нашата благодарност към Ректора – доц. д-р Григорий Вазов. В оперативен план бяхме сериозно улеснени от професионализма на изпълнителния директор на ВУЗФ - ас. Радостин Вазов и на Десислава Лазарова. За получената финансова подкрепа изказваме благодарност на гл. експерт Ива Денчева от МОМН и на изпълнителния директор на Фондация „Еврика“ - Боряна Кадмонова, за осигурения платен летен стаж в “Овергаз инк.“ – на изпълнителния директор на Фондация „Млада България“ - Мая Виденова, а за подаръците за участниците - на изпълнителния директор на „Руен Интърнешънъл“ - Стефко Колев.

проф. Сава Гроздев,
Председател на Националната комисия

Жури

проф. дпн Сава Гроздев, ВУЗФ – председател

гл. ас. Паскал Пиперков, ВТУ – секретар

проф. дмн Гено Николов, СУ

доц. дмн Стефка Буюклиева, ВТУ

доц. д-р Владимир Бабев, СУ

доц. д-р Владимир Тодоров, УАСГ

доц. д-р Иван Трендафилов, ТУ – София

доц. д-р Росен Николаев, ИУ Варна

гл. ас. Румен Раев, РУ

гл. ас. Асен Христов, ПУ

Група А

Задача 1. Дадена е матрицата

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Да се докаже, че:

а) B има само един реален характеристичен корен (собствена стойност);

б) не съществува реална матрица A, за която $3A^2 + A = B$.

Решение: а) *(5 точки)* Характеристичният полином на матрицата B е

$$f_B(x) = -x^3 - 3x^2 - 13x - 19.$$

Тъй като полиномът е от трета степен, той има поне един реален корен. Производната $f'_B(x) = -3x^2 - 6x - 13$ има отрицателна дискриминанта, следователно $f'_B(x) < 0$ за всяко реално число x. Това показва, че функцията $f_B(x)$ е строго намаляваща и тъй като $\lim\limits_{x\to-\infty} f_B(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f_B(x) = -\infty$, то $f_B(x)$ има само един реален корен.

б) *(5 точки)* Не е трудно да се види, че единственият реален корен β на полинома $f_B(x)$ е в интервала $(-2, -1)$. От друга страна, ако α е реален характеристичен корен на матрицата A и $3A^2 + A = B$, то $3\alpha^2 + \alpha = \beta < -1$. Но полиномът $3x^2 + x + 1$ има само положителни стойности, следователно неравенството $3\alpha^2 + \alpha < -1$ е невъзможно.

<u>II начин:</u>

Да допуснем, че $3A^2 + A = B$. Следователно

$$3A^2 + A = (\sqrt{3}A + \frac{\sqrt{3}}{6}E)^2 - \frac{1}{12}E = B \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{3}A + \frac{\sqrt{3}}{6}E)^2 = B + \frac{1}{12}E$$

$$\Rightarrow \det(B + \frac{1}{12}E) = \det(\sqrt{3}A + \frac{\sqrt{3}}{6}E)^2 = (\det(\sqrt{3}A + \frac{\sqrt{3}}{6}E))^2 \geq 0.$$

Но $\det(B + \frac{1}{12}E) = f_B(-\frac{1}{12}) < 0$, тъй като единственият реален корен на $f_B(x)$ е в интервала $(-2, -1)$, което води до противоречие.

Задача 2. За $k = 1, 2, 3, 4$ полагаме

$$J_k = \int_0^{\pi} \cos kx \cdot \cos(k+1)x \cdots \cos 2010x \cdot \cos 2011x \, dx \quad .$$

Да се докаже, че

а) $J_2 = J_3 = 0$;

б) $J_4 > 0$;

в) $J_1 > 0$.

Решение: С прилагане $2^{2011-k} - 1$ пъти на формулата $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha+\beta\right) + \cos\left(\alpha-\beta\right)\right)$ получаваме

$$\cos kx \cdot \cos\left(k+1\right)x \cdots \cos 2010x \cdot \cos 2011x =$$
$$= \frac{1}{2^{2011-k}} \sum \cos\left(k \pm (k+1) \pm \ldots \pm 2011\right)x \quad ,$$

където сумирането е по всички комбинации от знаци.

Понеже $\int\limits_0^{\pi} \cos nx\, dx = \begin{cases} 0 & \text{за} \quad n \neq 0\,, \text{ цяло} \\ \pi & \text{за} \quad n = 0 \end{cases}$,

то $J_k > 0$, когато съществува редица $s_{k+1}, s_{k+2}, \ldots s_{2011}$, $s_i \in \{-1, 1\}$, за която $k + s_{k+1}(k+1) + s_{k+2}(k+2) + \ldots + s_{2011}\,2011 = 0$, и $J_k = 0$, когато такава редица не съществува.

а) *(4 точки)* Нечетните числа $2 \leq n \leq 2011$ (съответно $3 \leq n \leq 2011$) са 1005. Следователно всяка сума $2 + s_3\,3 + s_4\,4 + \ldots + s_{2011}\,2011$ (съответно $3 + s_4\,4 + s_5\,5 + \ldots + s_{2011}\,2011$), $s_i \in \{-1, 1\}$, е нечетно число, т.е. различно от 0, значи $J_2 = J_3 = 0$.

б) *(3 точки)* Понеже $(4-5-6+7) + (8-9-10+11) + \cdots + (2008-2009-2010+2011) = 0$, значи $J_4 > 0$.

в) *(3 точки)* Понеже $1+2-3+(4-5-6+7)+(8-9-10+11) + \cdots + (2008-2009-2010+2011) = 0$, значи $J_1 > 0$.

Задача 3.

а) Нека $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ са всички естествени числа, подредени по произволен начин. Да се докаже, че редът

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-n_k)^k}{k!}$$

е разходящ за всяко реално число x.

б) Да се докаже, че съществува подреждане $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ на всички рационални числа така, че редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-q_n)^n}{n!}$$

е сходящ за всяко реално число x.

Решение: а) *(5 точки)* Лесно се вижда, че за безброй много k е изпълнено $n_k \geq k$. Следователно по формулата на *Stirling*

$$\sqrt[k]{\frac{|x-n_k|^k}{k!}} = \frac{|x-n_k|}{\sqrt[k]{k!}} \approx e\frac{|x-n_k|}{k(2\pi k)^{\frac{1}{2k}}},$$

и оттук получаваме, че за безброй много естествени числа k е изпълнено

$$\sqrt[k]{\frac{|x-n_k|^k}{k!}} \geq e\frac{|x-n_k|}{k},$$

където e е Неперовото число.

Да отбележим в допълнение, че за $n \geq 6$ имаме $n! < \left(\dfrac{n}{2}\right)^n$ (това може да се докаже по индукция). Така получаваме

$$\sqrt[k]{\frac{|x-n_k|^k}{k!}} > \sqrt[k]{\frac{|x-n_k|^k}{\left(\frac{k}{2}\right)^k}} = 2\frac{|x-n_k|}{k} \geq 2\frac{n_k}{k} - 2\frac{x}{k}$$

за големи k.

б) *(5 точки)* Лесно се вижда, че множеството $\mathbb{Q}$ от всички рационални числа може да се представи като редица $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots, q_n, \dots\}$ по такъв начин, че $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q_n}{n} = 0$. Оттук получаваме

$$\sqrt[k]{\frac{|x-q_k|^k}{k!}} = \frac{|x-q_k|}{\sqrt[k]{k!}} \approx e\frac{|x-q_k|}{k(2\pi k)^{\frac{1}{2k}}},$$

следователно за произволно x имаме $\frac{|x-q_k|}{k(2\pi k)^{\frac{2}{k}}} \to 0$, когато $k \to \infty$.

Група Б

Задача 1. Успоредни прави пресичат дадена парабола, като всяка от тях има двойка общи точки с параболата. Да се докаже, че средите на отсечките с краища всяка от тези двойки, лежат на права, успоредна на оста на параболата.

Решение: *(10 точки)* Нека дадената парабола има канонично уравнение $y^2 = 2px$. Тогава оста ѝ е абсцисната ос. Да пресечем параболата с произволна (наклонена спрямо оста ѝ) права с уравнение $y = kx + n$. Така следва $(kx+n)^2 = 2px$, откъдето следва, че абсцисите на пресечните точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ на правата с параболата са корените на уравнението $k^2x^2 + (2kn - 2p)x + n^2 = 0$. От формулите на Виет следва, че $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{p - kn}{k^2}$. Тогава средата на отсечката AB има ордината

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = k \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} + n = k \cdot \frac{p - kn}{k^2} + n = \frac{p}{k}.$$

Полученият резултат показва, че всяка права с уравнение $y = kx + \widetilde{n}$, която е успоредна на правата AB, ще пресече параболата в отсечка, чиято среда е на същото разстояние $\dfrac{p}{k}$ до абсцисната ос. Следователно всичките среди на всички такива отсечки лежат на права, успоредна на оста на параболата.

Задача 2. От цифрите на числото 2011 е образувана матрицата $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

а) Да се провери, че $A^2 - 3A + 2E = 0$.

б) Да се намерят целочислени матрици B и C, за които

$$A = B^{2011} + C^{2011}.$$

Решение: а) *(2 точки)* Проверяваме, че $A^2 - 3A + 2E = 0$.

б) *(8 точки)* От $A^2 - 3A + 2E = 0$ следва $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$. Тогава $(A-E)^3 = A^3 - 3A^2 + 3A - E = A - E$. Ако означим $A - E = B$, то $B^3 = B$. Оттук по индукция следва, че $B^{\,2n+1} = B$ за всяко естествено число n. В частност $B^{2011} = B = A - E$. Така $A = B^{2011} + E$. Ако означим $C = E$, то $C^{2011} = E$. Следователно $A = B^{2011} + C^{2011}$.

Задача 3. Нека $f(x) : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ е диференцируема функция, за която $f(1) = 0$ и

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{f^4(x) + x^4}}$$

за всяко $x \geq 1$. Да се докаже, че границата $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ съществува и е строго по-малка от 1.

Решение: *(10 точки)* Тъй като $f'(x) > 0$ за всяко $x \geq 1$, то функцията $f(x)$ е строго растяща в интервала $[1, \infty)$. Тогава за $x > 1$ получаваме $f(x) > f(1) = 0$ и

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{f^4(x) + x^4}} < \frac{1}{\sqrt{x^4}} = \frac{1}{x^2}.$$

Имаме

$$f(x) = \int_1^x f'(t)\, dt < \int_1^x \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{x} + 1 < 1$$

за $x \geq 1$. Оттук следва, че $f(x)$ е растяща и ограничена отгоре в интервала $[1, \infty)$ и следователно границата $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ съществува. Това, че тя е строго по-малка от 1, следва от

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \int_1^x f'(t)\, dt < \lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{dt}{t^2} = 1.$$

Група В

Задача 1. За всяко естествено число n полиномът $P_n(x)$ е зададен чрез детерминанта от ред n:

$$P_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & x \end{vmatrix}.$$

а) Намерете $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ и $P_4(x)$.

б) Докажете, че за всяко $n \geq 2$ е изпълнено $P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x)$.

в) Ако $n \geq 2$, намерете коефициента пред x^{n-2} в $P_n(x)$.

Решение: а) *(3 точки)*$P_1(x) = x$, $P_2(x) = x^2 - 1$, $P_3(x) = x^3 - 2x$, $P_4(x) = x^4 - 3x^2 + 1$.

б) *(4 точки)* Чрез развиване на детерминантата за $P_{n+1}(x)$ по $(n+1)$-вия ред намираме $P_{n+1}(x) = xP_n(x) - \Delta$, където Δ е детерминантата от n-ти ред, получена след зачетаване на $(n+1)$-вия ред и n-тия стълб. Развиването на Δ по n-тия стълб (който има $n-1$ нули и единица на n-та позиция) ни дава $\Delta = P_{n-1}(x)$ и следователно $P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x)$.

в) *(4 точки)* Ще докажем по индукция, че за всяко естествено число n в полинома $P_n(x)$:

(i) коефициентът пред x^n е единица;

(ii) коефициентът пред x^{n-1} е нула;

(iii) коефициентът пред x^{n-2} (при $n \geq 2$) е $-(n-1)$.

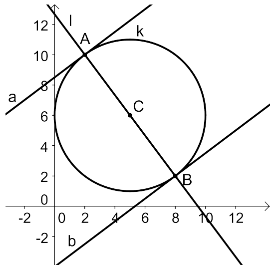
От подточка а) се вижда валидността на (i) и (ii) за $n = 1, 2, 3, 4$ и на (iii) за $n = 2, 3, 4$. Да допуснем, че трите твърдения са верни за всички естествени числа, ненадминаващи n. Тогава верността на (i), (ii) и (iii) за $n+1$ следва от индукционното предположение и рекурентната връзка $P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x)$. В частност, за всяко $n \geq 2$, коефициентът пред x^{n-2} в $P_n(x)$ е равен на $-(n-1)$.

Задача 2. Да се намерят най-малката и най-голямата стойности на функцията
$z = 3x - 4y + 36$, ако $x^2 + y^2 - 10x - 12y + 36 = 0$.

Решение: Равенството $x^2 + y^2 - 10x - 12y + 36 = 0$ е еквивалентно на

$$(x-5)^2 + (y-6)^2 = 5^2,$$

което е уравнение на окръжност с център точка $C(5,6)$ и радиус 5.



Правата $\ell\ :\ \ 4x + 3y - 38 = 0$ минава през точката $C(5,6)$ и е перпендикулярна на всяка права g с уравнение $3x - 4y = a$, където a е произволно реално число. Правата ℓ пресича окръжността в точките $A(2,10)$ и $B(8,2)$. Допирателните към окръжността в тези точки са перпендикулярни на ℓ и имат уравнения съответно $3x - 4y = -34$ и $3x - 4y = 16$. Координатите на всяка точка $M(x,y)$ от окръжността, която се намира между тези две успоредни прави, удовлетворяват $3x - 4y = a$, където $-34 < a < 16$. Следователно за всяка такава точка $M(x,y)$ е изпълнено

$$z(M) = 3x - 4y + 36 = a + 36 \in (2, 52)$$

и $z_{min} = z(A) = z(2,10) = 2, \quad z_{max} = z(B) = z(8,2) = 52.$

Задача 3. Сума от K евро е внесена в банка. За всяко $n = 1, 2, \ldots$, в края на n-тата година наличната сума се олихвява с 10 % и се изтеглят n хиляди евро.

а) Каква трябва да бъде минималната вноска K, за да могат да се реализират три тегления по описаната схема ?

б) Каква трябва да бъде минималната вноска K, за да може описаният процес да продължи неограничено дълго ?

Решение: В края на n-тата година след извършване на олихвяване и теглене остатъкът е

$$R_n = \Big(\frac{11}{10}\Big)^n \Big[K - 1000 \sum_{j=1}^{n} j \Big(\frac{10}{11}\Big)^j\Big].$$

а) *(3 точки)* За да могат да се реализират три тегления, трябва да е изпълнено $R_3 \geq 0$, т.е.

$$1.331K - 1210 - 2200 - 3000 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1.331K \geq 6410,$$

откъдето получаваме $K \geq 4815.93$ евро.

б) *(7 точки)* За да е изпълнено $R_n \geq 0$ за всяко n, трябва

$$K \geq 1000 \sum_{j=1}^{\infty} j x^j, \quad \text{където} \quad x = \frac{10}{11}.$$

Използвайки формулата за сума на членовете на безкрайна геометрична прогресия с частно x, $(|x| < 1)$,

$$\sum_{k=j}^{\infty} x^k = \frac{x^j}{1-x},$$

намираме

$$\sum_{j=1}^{\infty} j x^j = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=j}^{\infty} x^k \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{1-x} = \frac{1}{1-x} \sum_{j=1}^{\infty} x^j = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Следователно,

$$R_n \geq 0 \ \text{ за всяко } \ n \quad \Leftrightarrow \ K \geq 1000 \cdot \frac{\frac{10}{11}}{\frac{1}{11^2}} = 110000.$$

Отговор на подточка б): $K = 110000$ евро.