Група А

Задача 1. Нека $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ са произволни $n \times n$ матрици с реални елементи, такива че $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$, $\mathbf{A}^3 = \mathbf{B}^3$ и $\mathbf{A}^2\mathbf{B} = \mathbf{B}^2\mathbf{A}$. Да се докаже, че матрицата $\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2$ е необратима .

Решение: Да допуснем, че $\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2$ притежава обратна матрица, тогава

$$\begin{aligned}\mathbf{A} - \mathbf{B} &= \big(\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2\big)^{-1}\big(\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2\big)\big(\mathbf{A} - \mathbf{B}\big)\\ &= \big(\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2\big)^{-1}\big(\mathbf{A}^3 - \mathbf{A}^2\mathbf{B} + \mathbf{B}^2\mathbf{A} - \mathbf{B}^3\big) = \mathbf{0},\end{aligned}$$

противоречие с условието $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$.

Задача 2. Да се докаже неравенството

$$\int_0^1 \Big[(1+x^2)^n + (1-x^2)^n\Big]\, dx \geq \frac{2^{n+1}}{2n+1}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Решение: Да означим лявата страна на неравенството с I_n. С интегриране по части получаваме

$$\begin{aligned}I_n &= x\Big[(1+x^2)^n + (1-x^2)^n\Big]\Big|_0^1\\ &\quad -2n\int_0^1 \Big[x^2(1+x^2)^{n-1} - x^2(1-x^2)^{n-1}\Big]\, dx\\ &= 2^n - 2n\big(I_n - I_{n-1}\big)\,,\end{aligned}$$

т. е., изпълнена е рекурентната връзка

$$I_n = \frac{2n}{2n+1}\, I_{n-1} + \frac{2^n}{2n+1}\,.$$

Доказателството на неравенството завършваме с индукция по n. При $n = 0$ то се трансформира в равенство ($I_0 = 2$). Нека неравенството е вярно за $n-1$, $n \in \mathbb{N}$, тогава верността му за n следва от рекурентната връзка:

$$\begin{aligned}I_n &\geq \frac{2n}{2n+1}\,\frac{2^n}{2n-1} + \frac{2^n}{2n+1} = \frac{2^{n+1}}{2n+1}\Big(\frac{n}{2n-1} + \frac{1}{2}\Big)\\ &= \frac{2^{n+1}}{2n+1} \cdot \frac{4n-1}{4n-2} > \frac{2^{n+1}}{2n+1}\,.\end{aligned}$$

Задача 3. Нека $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ е алгебричен полином от степен $n \geq 2$, чиито коефициенти са комплексни числа, удовлетворяващи условието $|a_k| = 1$, $k = 0, \dots, n$.

а) Да се докаже, че ако $P(\alpha) = 0$, тогава

$$|\alpha| < 2 - \frac{1}{2^n}.$$

б) Да се докаже, че съществува полином $P(z)$ от степен n от разглеждания клас, такъв че $P(\alpha) = 0$ за някое $\alpha \in \mathbb{R}$, удовлетворяващо неравенството $\alpha > 2 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Решение: а) От неравенството на триъгълника получаваме

$$\begin{aligned} 0 = |P(\alpha)| &\geq |\alpha|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \cdot |\alpha|^k = |\alpha|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |\alpha|^k \\ &= |\alpha|^n - \frac{|\alpha|^n - 1}{|\alpha| - 1} = \frac{|\alpha|^{n+1} - 2|\alpha|^n + 1}{|\alpha| - 1} =: \frac{Q(|\alpha|)}{|\alpha| - 1}. \end{aligned} \tag{1}$$

Полиномът $Q(t) = t^{n+1} - 2t^n + 1$ има производна

$$Q'(t) = (n+1)t^{n-1}\Big(t - \frac{2n}{n+1}\Big),$$

следователно Q намалява монотонно в $[0, \frac{2n}{n+1}]$ и расте монотонно в $[\frac{2n}{n+1}, \infty)$. От $Q(1) = 0$ и $Q(2) = 1$ заключаваме, че Q има единствен корен x_0 в интервала $(1, 2)$, като $Q(x) < 0$ в $(1, x_0)$ и $Q(x) > 0$ в (x_0, ∞). Тъй като

$$Q\Big(2 - \frac{1}{2^n}\Big) = \Big(2 - \frac{1}{2^n}\Big)^n \Big(2 - \frac{1}{2^n} - 2\Big) + 1 = -\Big(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\Big)^n + 1 > 0,$$

следва, че $2 - \frac{1}{2^n}$ се намира надясно от x_0 и $Q(x) > 0$ при $x \geq 2 - \frac{1}{2^n}$. Ако допуснем, че $|\alpha| \geq 2 - \frac{1}{2^n}$, тогава от (1) ще следва

$$0 = |P(\alpha)| \geq \frac{Q(|\alpha|)}{|\alpha| - 1} > 0,$$

противоречие. Следователно $|\alpha| < 2 - \dfrac{1}{2^n}$.

б) Нека $R(z) = z^n - \sum_{k=0}^{n-1} z^k$, тогава $Q(z) = (z-1)R(z)$, и от казаното за $Q(z)$ в доказателството на а) следва, че $R(z)$ има единствен положителен корен α, и той е разположен в интервала $(1, 2)$. Ще докажем, че $\alpha > 2 - 1/2^{n-1}$, за което е достатъчно да покажем, че $Q(2 - 1/2^{n-1}) < 0$. От неравенството на Бернули $(1+x)^n \geq 1 + nx$, което е строго при $n > 1$ и $x > -1$, получаваме

$$Q\Big(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\Big) = \Big(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\Big)^n \Big(2 - \frac{1}{2^{n-1}} - 2\Big) + 1 = 1 - 2\Big(1 - \frac{1}{2^n}\Big)^n$$
$$< 1 - 2\Big(1 - \frac{n}{2^n}\Big) = \frac{n}{2^{n-1}} - 1 \leq 0\,,$$

с което твърдението на б) е доказано.

Група Б

Задача 1. Върху параболата $y = x^2$ са избрани две различни точки $K(x_1, y_1)$ и $L(x_2, y_2)$. Допирателните към параболата в точките K и L се пресичат в точка M. Да се намери отношението λ между лицето S на триъгълника KLM и лицето S_1 на намиращата се в този триъгълник област, заключена между графиката на параболата и отсечката KL. Да се докаже, че λ не зависи от избора на точките K и L.

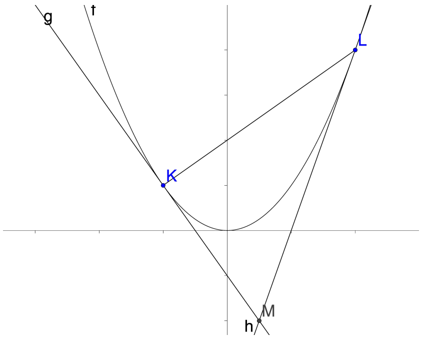
Решение: Нека точките са $K(x_1, x_1^2)$ и $L(x_2, x_2^2)$, като за определеност приемаме, че $x_1 < x_2$. Уравнението на KL е

$$y = (x_1 + x_2)x - x_1 x_2\,.$$

Ъгловият коефициент на допирателната g към параболата в точката K е $k = 2x_1$, а уравнението на самата допирателна g е $y = 2x_1 x - x_1^2$. Аналогично, уравнението на допирателната h към параболата в точката L е $y = 2x_2 x - x_2^2$. За координатите на пресечната точка на g и h намираме $M\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, x_1 x_2\right)$.

За лицето на ΔKLM получаваме

$$S = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & \dfrac{x_1 + x_2}{2} & x_1 x_2 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{4}(x_2 - x_1)^3\,.$$



Лицето S_1 намираме от

$$S_1 = \int\limits_{x_1}^{x_2} \Big[(x_1 + x_2)x - x_1x_2 - x^2\Big]dx$$

$$= \int\limits_{x_1}^{x_2} \Big[(x_2 - x_1)(x - x_1) - (x - x_1)^2\Big]dx = \frac{(x_2 - x_1)^3}{6}.$$

Следователно $S : S_1 = 3 : 2$.

Задача 2. Нека $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ и $f(f(x)) = 6x - f(x)$.

а) Да се намери функция $f(x)$, която удовлетворява тези условия.

б) Да се докаже, че $f(x)$ е единствена.

Решение: а) $f(x) = 2x$.

б) Ще покажем, че тази функция е единствена. Нека x_0 е произволно положително число. Полагаме $a_0 = x_0$ и $a_{n+1} = f(a_n)$. Очевидно $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, и $a_{n+2} = f(f(a_n)) = 6a_n - a_{n+1}, \forall n \geq 0$. От характеристичното уравнение $t^2 + t - 6 = 0$ с корени $t_1 = -3$ и $t_2 = 2$, намираме общия член на редицата $a_n = p.2^n + q.(-3)^n$.

Ако допуснем, че $q \neq 0$, то за достатъчно големи n ще съществуват отрицателни членове на редицата, което противоречи на $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Следователно $q = 0$, $a_n = p.2^n$, $x_0 = a_0 = p$, $f(x_0) = a_1 = 2p = 2x_0$. С това единствеността е доказана.

Задача 3. Да се докаже, че ако $\alpha \neq -1$ е реално число, то

$$\int_0^{\pi/2} (1+\sin x)^\alpha \, dx \geq \frac{2^{\alpha+1}-1}{\alpha+1}\,.$$

Решение: За всяко $x \in \mathbb{R}$ е изпълнено неравенството $\cos x \leq 1$. Тогава

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} (1+\sin x)^\alpha \, dx &\geq \int_0^{\pi/2} (1+\sin x)^\alpha \, \cos x \, dx \\
&= \int_0^{\pi/2} (1+\sin x)^\alpha \, d(1+\sin x) \\
&= \frac{(1+\sin x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2^{\alpha+1}-1}{\alpha+1}\,.
\end{aligned}$$

Група B

Задача 1. Да се докаже, че матрицата

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

удовлетворява уравнението $\boldsymbol{A}^{2012} + 3^{1005}\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{O}$.

Решение: Непосредствено се установява, че $\boldsymbol{A}^6 = -27\boldsymbol{E}$, където $\boldsymbol{E}$ е единичната матрица 2×2. Тогава

$$\boldsymbol{A}^{2012} = \boldsymbol{A}^{2010}\boldsymbol{A}^2 = (\boldsymbol{A}^6)^{335}\boldsymbol{A}^2 = (-3^3\boldsymbol{E})^{335}\boldsymbol{A}^2 = -3^{1005}\boldsymbol{A}^2$$

и следователно

$$\boldsymbol{A}^{2012} + 3^{1005}\boldsymbol{A}^2 = -3^{1005}\boldsymbol{A}^2 + 3^{1005}\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{O}\,.$$

Задача 2. Нека a е най-малкото естествено число, за което параболата $p : y = ax^2$ няма общи точки с правите $l_1 : y = ax - 2$ и $l_2 : y = -ax - 2$. За $i = 1, 2$ нека m_i е отсечката с най-малка дължина, свързваща точка от параболата p с точка от правата l_i.

а) Да се намерят дължините на отсечките m_1 и m_2.

б) Да се намери лицето на фигурата, оградена от p, l_1, l_2, m_1 и m_2.

Решение: Системите $\left| \begin{array}{l} y = ax^2 \\ y = ax - 2 \end{array} \right.$ и $\left| \begin{array}{l} y = ax^2 \\ y = -ax - 2 \end{array} \right.$ нямат решение точно тогава, когато е в сила неравенството

$$a^2 - 8a < 0 \iff a(a-8) < 0 .$$

Най-малкото естествено число, което е решение на това неравенство е $a = 1$. Така при $a = 1$ параболата p има уравнение $y = x^2$ и $l_1 : y = x - 2$, $l_2 : y = -x - 2$.

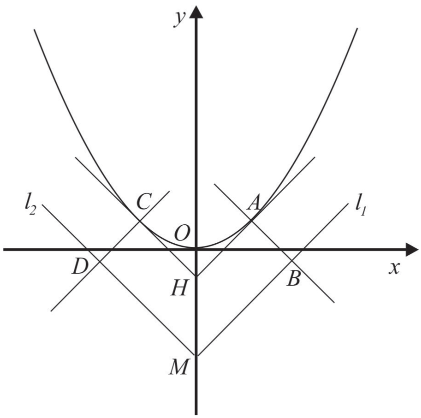
а) Уравнението на допирателната към параболата в точката (x_0, x_0^2) е

$$y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0) \iff y = 2x_0 x - x_0^2.$$

Тази допирателна е успоредна на l_1 точно тогава, когато $x_0 = \frac{1}{2}$. Тогава правата през точката $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, перпендикулярна на l_1 има уравнение $y = -x + \frac{3}{4}$. Тя пресича l_1 в точката $B\left(\frac{11}{8}, -\frac{5}{8}\right)$. Следователно отсечката с най-малка дължина, свързваща точка от параболата с точка от правата l_1, е $m_1 = AB$ с дължина $\frac{7}{8}\sqrt{2}$.

Аналогично допирателната към p, успоредна на l_2 минава през точката $C\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$. От съображения за симетрия следва, че правата през C, която е перпендикулярна на правата l_2 има уравнение $y = x + \frac{3}{4}$. Тя пресича l_2 в точката $D\left(-\frac{11}{8}, -\frac{5}{8}\right)$. Следователно отсечката с най-малка дължина, свързваща точка от параболата с точка от правата l_2, е $m_2 = CD$ с дължина $\frac{7}{8}\sqrt{2}$.

б) Пресечната точка на допирателната към параболата в точката A, която има уравнение $y = x - \frac{1}{4}$, с ординатната ос е $H(0, -\frac{1}{4})$. Пресечната точка на l_1 с ординатната ос е $M(0, -2)$. Тъй като геометричната фигура, чието лице търсим, е симетрична спрямо ординатната ос, достатъчно е да намерим лицето S на областта, оградена от ординатната ос, правата l_1, правата AB и параболата p и да го умножим по 2. Областта, чието лице е равно на S, е обединение на правоъгълния трапец $MBAH$ с лице S_1 и криволинейния триъгълник, ограден от отсечките OH, HA и дъгата OA



от параболата, с лице S_2. Пресмятаме

$$S_1 = \frac{1}{2}(MB + AH)AB = \frac{1}{2}\left(\frac{11}{8}\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{7}{8}\sqrt{2} = \frac{105}{64}.$$

$$S_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[x^2 - \left(x - \frac{1}{4}\right)\right] dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4}\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{24}.$$

Тогава $S = S_1 + S_2 = \dfrac{105}{64} + \dfrac{1}{24} = \dfrac{323}{192}$ и търсеното лице е $2S = \dfrac{323}{96}$.

Задача 3. Нека $n \geq 2$ е естествено число. Да се докаже, че

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n}.$$

Решение: Разглеждаме функцията

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

при $x \geq 1$. Имаме

$$f'(x) = \left(e^{(x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)' = e^{(x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right).$$

Ако сега означим

$$g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\,,$$

то при $x \geq 1$ е изпълнено

$$g'(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2(1+x)} > 0\,,$$

откъдето следва, че $g(x)$ е строго растяща и $g(x) < \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Тогава $f'(x) < 0$ и функцията $f(x)$ е строго намаляваща при $x \geq 1$. Оттук получаваме $f(x) < f(x-1)$ за $x \geq 2$, с което търсеното неравенство е доказано.

Решение II: Неравенството е еквивалентно на

$$\begin{aligned}&\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} < \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n} \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n} > \frac{n+1}{n}\\ &\Leftrightarrow\; \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n} > 1 + \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

За да проверим, че последното неравенство е вярно, използваме неравенството на Бернули $(1+x)^n \geq 1 + nx$, вярно при $x \geq -1$ и $n \in \mathbb{N}$. Имаме

$$\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n} \geq 1 + \frac{n}{n^2-1} \overset{?}{>} 1 + \frac{1}{n}.$$

Второто от тези две неравенства е еквивалентно на $n^2 > n^2 - 1$, т. е., е очевидно вярно, а оттам следва и верността на даденото неравенство.