Национална студентска олимпиада по математика
Велико Търново, 15 май 2010 година
група "А"
задачи и решения

Задача 1. Дадена е елипса с уравнение $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

а) Да се докаже, че пресечните точки на правите $y=\dfrac{b}{a}x$ и $y=-\dfrac{a}{b}x$ с елипсата са върхове на ромб. Да се намери радиусът на вписаната в този ромб окръжност.

б) Да се намери сечението на всички ромбове, вписани в елипсата.

Решение. Дадените в а) прави са взимно перпендикулярни и минават през центъра на симетрия O на дадената елипса. Оттук техните общи точки с елипсата са централно симетрични спрямо O, т.е. диагоналите на получения четириъгълник са взаимно перпендикулярни и се разполовяват в точка O, което доказва, че този четириъгълник е ромб.

Ще докажем, че всички ромбове вписани в елипсата $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ са описани около една и съща окръжност. Нека правите $y=kx$ и $y=-\dfrac{1}{k}x$ са диагонали на ромба $ABCD$. Решавайки системите уравнения

$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\[2ex] y=kx\end{array}\right. \qquad \text{и} \qquad \left|\begin{array}{l}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\[2ex] y=-\dfrac{1}{k}x\end{array}\right. ,$$

намираме координатите на точките A, B, C, D:

$$x_{1,2}=\frac{\pm ab}{\sqrt{b^2+k^2a^2}}\,,\qquad y_{1,2}=\frac{\pm kab}{\sqrt{b^2+k^2a^2}}\,,$$

$$x_{3,4}=\frac{\pm kab}{\sqrt{k^2b^2+a^2}}\,,\qquad y_{3,4}=\frac{\mp ab}{\sqrt{k^2b^2+a^2}}\,.$$

Следователно

$$|OC|=\frac{ab\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{b^2+k^2a^2}}\,,\qquad |OD|=\frac{ab\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{a^2+k^2b^2}}\,.$$

Височината OE спусната от върха O към страната CD в правоъгълния триъгълник CDO е

$$|OE|=\frac{|OC|.|OD|}{\sqrt{|OC|^2+|OD|^2}}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\,.$$

Така получаваме, че радиусът на окръжността вписана в произволен ромб $ABCD$ е $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

От това следва, че кръгът с радиус $r=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и център точка O се съдържа във всички ромбове, вписани в дадената елипса. Лесно се проверява, че за всяка точка извън този кръг съществува вписан ромб, който не я съдържа.

Задача 2. Нека функцията f е диференцируема в $\mathbb{R}$ и $f'(x) \neq 0$ за всяко $x \in \mathbb{R}$.

а) Докажете, че функцията f е обратима.

б) Ако графиката на f минава през точките $A(1, 2010)$ и $B(-9, 10)$, решете уравнението:

$$f^{-1}\big(f(x^2-15)-2000\big)+9=0\ .$$

Докажете, че съществува поне една точка от графиката на f, в която допирателната към нея е перпендикулярна на правата $y=-\dfrac{1}{200}x+2010$.

Решение. а) Достатъчно е да докажем, че от $a, b \in \mathbb{R}$ и $a < b$ следва $f(a) \neq f(b)$.

От теоремата на Лагранж следва, че съществува точка $\xi \in (a, b)$, такава че $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$. Тъй като по условие $f'(\xi) \neq 0$, то и $f(a) \neq f(b)$.

б) От дадените условия последователно получаваме

$$f\left(f^{-1}\left(f(x^2-15)-2000\right)\right)=f(-9),\quad f(x^2-15)-2000=10,$$
$$f(x^2-15)=2010,\quad f(x^2-15)=f(1),$$

откъдето $x^2-15=1$ и $x=\pm 4$.

За да бъде допирателната към графиката на функцията f перпендикулярна на дадената права в точка $M(\xi, f(\xi))$, е необходимо и достатъчно $f'(\xi).\left(-\frac{1}{200}\right)=-1$. Отново от теорамата на Лагранж имаме $f(1)-f(-9)=10\,f'(\xi)$ за някое $\xi \in (-9, 1)$. Тогава $f'(\xi)=200$, с което задачата е решена.

Задача 3. Нека $f\ :\ [0,\, +\infty) \to [0,\, +\infty)$ е непрекъсната функция такава, че за всяко $x \in [0,\, +\infty)$ е изпълнено $\int\limits_0^x f(t)dt\ \le\ x$. Да се докаже, че интегралът $\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2}dx$ е сходящ.

Решение. Полагаме $F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$. Имаме

$$\int\limits_0^x \frac{f(t)}{1+t^2}dt = \int\limits_0^x \frac{d\left(F(t)\right)}{1+t^2}dt = \frac{F(x)}{1+x^2} + \int\limits_0^x \frac{2tF(t)}{\left(1+t^2\right)^2}dt\ .$$

По условие $0 \le F(x) \le x$. Тогава $\frac{F(x)}{1+x^2} \le \frac{x}{1+x^2}$, откъдето $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{1+x^2} = 0$.

От друга страна $\frac{2tF(t)}{\left(1+t^2\right)^2} \le \frac{2t^2}{\left(1+t^2\right)^2}$ и интегралът $\int\limits_0^{+\infty} \frac{2t^2}{\left(1+t^2\right)^2}dt$ е сходящ, което означава, че интегралът $\int\limits_0^{+\infty} \frac{2tF(t)}{\left(1+t^2\right)^2}dt$ е сходящ.

Следователно интегралът $\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2}dx$ е сходящ.

Национална студентска олимпиада по математика
Велико Търново, 15 май 2010 година
група "Б"
задачи и решения

Задача 1. Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са корените на уравнението $x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1 = 0$.

Да се намери $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - x_i}$.

Решение. Нека $P(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1 = (x - x_1) \ldots (x - x_n)$. Тогава $P'(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{P(x)}{x - x_i}$, откъдето $\displaystyle\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i}$.

При $x = 1$ следва

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - x_i} = \frac{P'(1)}{P(1)} = \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n + 1} = \frac{n}{2}.$$

Задача 2. а) За хиперболата с уравнение $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ да се докаже, че произведението на разстоянията от произволна точка на хиперболата до асимптотите ѝ е равно на $\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

б) Да се намерят всички точки от хиперболата $x^2 - y^2 = 4$, които са два пъти по-близо до едната асимптота, отколкото до другата.

Решение. а) Нормалните уравнения на асимптотите на хиперболата с уравнение $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ имат вида $\dfrac{bx \pm ay}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0$. Тогава разстоянията от точка $A(x_0, y_0)$ до тези прави са равни на $d_1 = \dfrac{bx_0 + ay_0}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $d_2 = \dfrac{bx_0 - ay_0}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Следователно произведението от разстоянията от A до асимптотите е равно на

$$d_1 d_2 = \frac{|b^2x_0^2 - a^2y_0^2|}{a^2+b^2}.$$

Тъй като точката A лежи на хиперболата, то $\dfrac{x_0^2}{a^2} - \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$, откъдето $b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = a^2b^2$. Оттук следва, че търсеното произведение е равно на $\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

б) Ако едното разстояние е два пъти по-голямо от другото, то едното разстояние е равно на $2k$, а другото на k. От а) следва $k = 1$.

Тъй като асимптотите на равнораменната хипербола са перпендикулярни, то разстоянието от точка $A(x_0, y_0)$, удовлетворяваща дадените условия, до координатното начало е равно на $\sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$. Така координатите на точката A удовлетворяват равенствата $\left| \begin{array}{l} x_0^2 - y_0^2 = 4 \\ x_0^2 + y_0^2 = 5 \end{array} \right.$. Оттук следва $x_0 = \pm\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ и $y_0 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Следователно търсените точки са $A_1\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $A_2\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $A_3\left(-\dfrac{3}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $A_4\left(-\dfrac{3}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Задача 3. Да се пресметнат интегралите:

а) $I_1 = \int\limits_0^\pi \frac{\sin x}{7+4\cos 2x+\cos^2 2x}dx$;

б) $I_2 = \int\limits_0^\pi \frac{x\sin x}{7+4\cos 2x+\cos^2 2x}dx$.

Решение.

Решение. а) $I_1 = -\int\limits_0^\pi \frac{d\cos x}{7+4\cos 2x+\cos^2 2x}$. Полага се $\cos x = t$. Тогава $I_1 = \frac{1}{4}\int\limits_{-1}^1 \frac{dt}{t^4+t^2+1} = \frac{1}{8}\left[\int\limits_{-1}^1 \frac{1-t}{t^2-t+1}dt + \int\limits_{-1}^1 \frac{1+t}{t^2+t+1}dt\right]$. В първия интеграл се полага $t = u+\frac{1}{2}$, а във втория $t = v-\frac{1}{2}$.

Тогава $I_1 = \frac{1}{8}\left[\int\limits_{-3/2}^{1/2} \frac{\frac{1}{2}-u}{u^2+\frac{3}{4}}du + \int\limits_{-1/2}^{3/2} \frac{\frac{1}{2}+v}{v^2+\frac{3}{4}}dv\right]$. Във втория интеграл се замества $v=-u$, от където

$$I_1 = \frac{1}{8}\left[2\int\limits_{-3/2}^{1/2} \frac{\frac{1}{2}-u}{u^2+\frac{3}{4}}du\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\int\limits_{-3/2}^{1/2} \frac{du}{u^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\int\limits_{-3/2}^{1/2} \frac{du^2}{u^2+\frac{3}{4}}\right] =$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2u}{\sqrt{3}}\Big|_{-3/2}^{1/2} - \ln\left(u^2+\frac{3}{4}\right)\Big|_{-3/2}^{1/2}\right] = \frac{\pi\sqrt{3}+3\ln 3}{24}.$$

б) Полага се $x = \pi - t$. Тогава $I_2 = \int\limits_\pi^0 \frac{(\pi-t)\sin t}{7+4\cos 2t+\cos^2 2t}d(\pi-t) = \pi I_1 - I_2$, откъдето $I_2 = \frac{\pi}{2}I_1 = \frac{\pi(\pi\sqrt{3}+3\ln 3)}{48}$.

Национална студентска олимпиада по математика
Велико Търново, 15 май 2010 година

група "B"

задачи и решения

Задача 1. Периодично се внасят суми по сметка при просто годишно олихвяване. В началото на първата година се внася сума K при лихва $p\%$, в началото на втората година се внася сума $\frac{K}{2}$ при лихва $\frac{p}{2}\%$, в началото на третата година се внася сума $\frac{K}{4}$ при лихва $\frac{p}{4}\%$ и т.н. (през всяка следваща година се внася два пъти по-малка сума и лихвата е два пъти по-малка от предходната година).

а) Ако $K = 1024$ лв. и $p = 12\%$, да се намери сумата L_5 от натрупаните лихви в края на петата година.

б) Ако процесът продължава до безкрайност, да се намери границата $L(K,p)$ на сумата от натрупаните лихви. Ако $K = 1024$ лв. и $p = 12\%$, да се докаже, че от началото на шестата до края на четиридесетата година са натрупани по-малко от 16 лв. лихви.

Решение. Нека $i = \frac{p}{100}$ и $L_n(K,p)$ е сумата от натрупаните лихви в края на n-тата година.

$$L_n(K,p) = \left(Ki + K\frac{i}{2} + K\frac{i}{2^2} + ... + K\frac{i}{2^{n-1}}\right) + \left(\frac{K}{2}\frac{i}{2} + \frac{K}{2}\frac{i}{2^2} + ... + \frac{K}{2}\frac{i}{2^{n-1}}\right) +$$

$$+ \left(\frac{K}{2^2}\frac{i}{2^2} + \frac{K}{2^2}\frac{i}{2^3} + ... + \frac{K}{2^2}\frac{i}{2^{n-1}}\right) + ... + \left(\frac{K}{2^{n-1}}\frac{i}{2^{n-1}}\right) =$$

$$= Ki\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}\right) + \frac{Ki}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}\right) + \frac{Ki}{2^2}\left(\frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}\right) +$$

$$... + \frac{Ki}{2^{n-1}}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) = Ki\left(1.\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2^2}\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2^4}\frac{1-\frac{1}{2^{n-2}}}{1-\frac{1}{2}} + ... + \frac{1}{2^{2n-2}}\frac{1-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right) =$$

$$2Ki\left[1.\left(1-\frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{2^2}.\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right) + \frac{1}{2^4}.\left(1-\frac{1}{2^{n-2}}\right) + ... + \frac{1}{2^{2n-2}}.\left(1-\frac{1}{2}\right)\right] =$$

$$2Ki\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + ... + \frac{1}{2^{2n-2}} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+2}} - ... - \frac{1}{2^{2n-1}}\right) =$$

$$= 2Ki\left(1.\frac{1-\frac{1}{2^{2n}}}{1-\frac{1}{2^2}} - \frac{1}{2^n}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{Ki\left(2^{2n+1} - 3.2^n + 1\right)}{3.2^{2n-2}}.$$

а) $L_5(1024, 12\%) = \dfrac{1024.0,12.(2^{11} - 3.2^5 + 1)}{3.2^8} = 312,48$ лв.

б)

$$L(K,p) = \lim_{n\to\infty} L_n(K,p) = \lim_{n\to\infty}\frac{Ki\left(2^{2n+1} - 3.2^n + 1\right)}{3.4^{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{Ki}{3}\left(2^3 - \frac{3}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{2n-2}}\right) = \frac{8Ki}{3}$$

$$L(1024, 12\%) = \frac{8.1024.0,12}{3} = 327,68 \text{ лв.}$$

Но

$$L_{40}(1024, 12\%) < L(1024, 12\%)$$

, следователно

$$L_{40}(1024, 12\%) - L_5(1024, 12\%) < L(1024, 12\%) - L_5(1024, 12\%) =$$

$$= 327,68 - 312,48 = 15,20 < 16\text{лв.}$$

Задача 2. Нека за функцията $f(x)$ е в сила равенството

$$f(x+1)=\frac{f(x)\cos\dfrac{\pi}{67}+\sin\dfrac{\pi}{67}}{\cos\dfrac{\pi}{67}-f(x)\sin\dfrac{\pi}{67}}$$

за всяко реално число x.

Ако $f(0)=1$ да се намери $f(2010)$.

Решение. Ако $f(x+1)=\dfrac{f(x)\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-f(x)\sin\alpha}$, то

$$f(x+2)=\frac{\dfrac{f(x)\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-f(x)\sin\alpha}\cdot\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\dfrac{f(x)\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-f(x)\sin\alpha}\cdot\sin\alpha}=$$

$$=\frac{f(x)(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha-f(x)2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{f(x)\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha-f(x)\sin 2\alpha}.$$

Оттук по индукция следва, че

$$f(x+n)=\frac{f(x)\cos n\alpha+\sin n\alpha}{\cos n\alpha-f(x)\sin n\alpha}.$$

Тогава $f(2010)=$

$$=\frac{f(0)\cos\dfrac{2010\pi}{67}+\sin\dfrac{2010\pi}{67}}{\cos\dfrac{2010\pi}{67}-f(0)\sin\dfrac{2010\pi}{67}}=\frac{\cos 30\pi+\sin 30\pi}{\cos 30\pi-\sin 30\pi}=1\ .$$

Задача 3. Дадени са окръжностите C_1 и C_2 с центрове съответно $O_1(-3,0)$ и $O_2(3,0)$ и радиуси $R_1 = R_2 = 2$. През точка $M(x,0)$, където $x \in [-1,1]$, са прекарани допирателни MT_1 и MT_2 ($T_1 \in C_1,\ T_2 \in C_2$). Да се намери интервалът на изменение на дължината на ортогоналната проекция върху абсцисната ос на T_1T_2.

Решение. Уравненията на допирателните са:

$$l_1 \,:\, y(u) = \frac{-2}{\sqrt{x^2+6x+5}}(u-x))$$

и

$$l_2 \,:\, y(u) = \frac{2}{\sqrt{x^2-6x+5}}(u-x)).$$

Абсцисите на T_1 и T_2 са съответно
$u_{T_1} = -\dfrac{3x+5}{x+3}$ и $u_{T_2} = \dfrac{3x-5}{x-3}$. Нека $|u_{T_2} - u_{T_1}| = \dfrac{6x^2-30}{x^2-9} = f(x)$.

Тогава $\max|u_{T_2} - u_{T_1}| = \max\{f(x)\,;\, x \in [-1,1]\} = f(0) = \dfrac{10}{3}$ и $\min|u_{T_2} - u_{T_1}| = \min\{f(x)\,;\, x \in [-1,1]\} = f(-1) = f(1) = 3$. От където търсеният интервал е $\left[3, \dfrac{10}{3}\right]$.